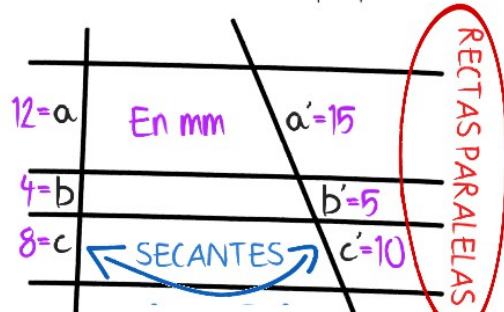


GEOMETRÍA 5 y 6

Teorema de Tales

Las medidas de los segmentos que se forman en dos rectas secantes (que se cortan) cuando se cruzan con un grupo de rectas paralelas, son directamente proporcionales entre ambas rectas



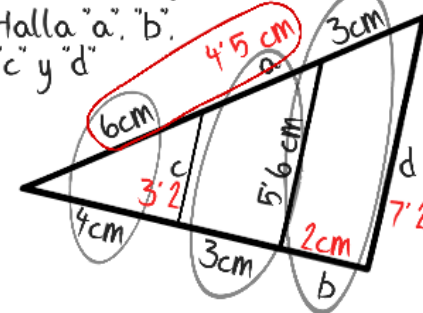
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Por ejemplo

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0.8$$

Veamos un ejercicio con tres triángulos

Halla "a", "b", "c" y "d"



En los lados no paralelos aplicamos la regla de tres acorde al teorema de Tales

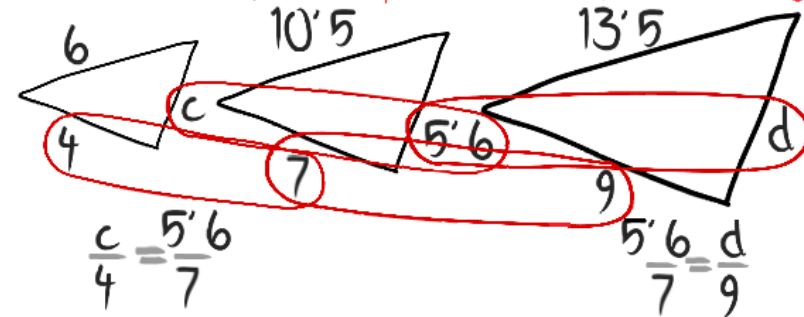
$$\frac{6}{4} = \frac{a}{3}$$

$$a = 18/4 = 4.5 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{b}$$

$$b = 12/6 = 2 \text{ cm}$$

En los lados paralelos debemos ser más cuidadosos. Una buena técnica, para no equivocarnos, es separar los triángulos



$$\frac{c}{4} = \frac{5.6}{7}$$

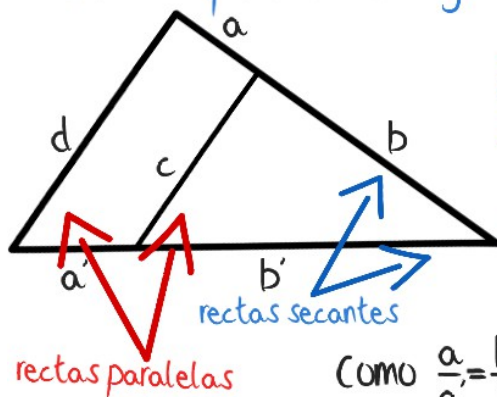
$$c = 22.4/7 = 3.2$$

$$\frac{5.6}{7} = \frac{d}{9}$$

$$d = 50.4/7 = 7.2$$

Cuando nos encontramos dos triángulos que comparten un ángulo y sus lados opuestos son paralelos:

Decimos que estos triángulos están en posición de Tales y que son SEMEJANTES porque sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales



K es la RAZÓN DE SEMEJANZA entre los dos triángulos

$$\text{Como } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \longrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{a'+b'}{b'} = \frac{d}{c} = k$$

LADOS TRIÁNGULO GRANDE

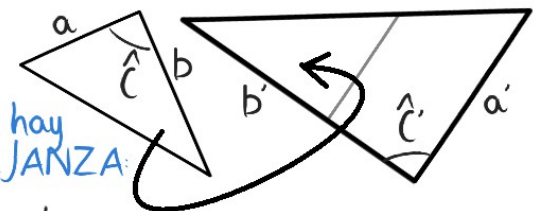
LADOS TRIÁNGULO PEQUEÑO

Los triángulos semejantes no tienen por qué presentarse en posición de Tales

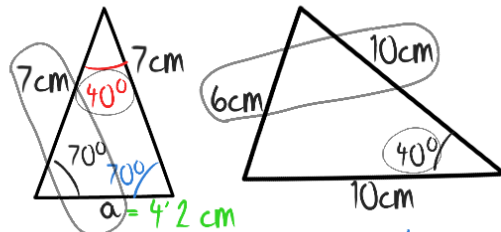
Para estudiar si dos triángulos son semejantes hay tres CRITERIOS DE SEMEJANZA:

- Todos sus ángulos son iguales
- Todos sus lados son proporcionales
- Tienen dos lados proporcionales, y el ángulo que forman es igual

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y $\hat{C} = \hat{C}'$ En esos tres casos tenemos garantizado que esos triángulos se pueden poner en posición de Tales



Veamos si podemos obtener la medida de "a":



Como ya sabemos que son proporcionales, podemos establecer la regla de 3:

MAYOR MENOR

Luego $\frac{10}{7} = \frac{6}{a}$

$a = 42/10 = 4.2 \text{ cm}$

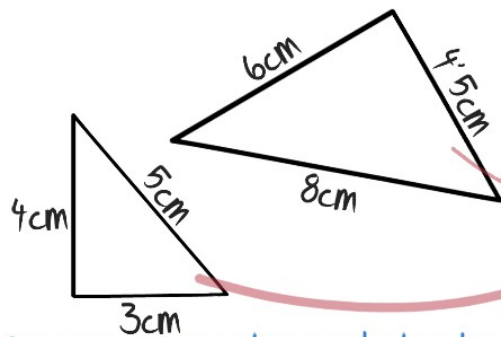
Como ambos triángulos son isósceles (dos lados iguales), también tienen dos ángulos iguales

Como los tres ángulos de un triángulo suman 180° : $\begin{cases} 70 + 70 = 140 \\ 180 - 140 = 40 \end{cases}$

Ya tenemos dos lados proporcionales, y el ángulo comprendido igual; $\left\{ \frac{10}{7} = \frac{10}{7} \right.$

luego, sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales

Analiza si son semejantes los siguientes triángulos



Si fuesen semejantes, sus lados serían proporcionales, y tendría que ocurrir:

MAYOR	MEDIANO	MEJOR
$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{4.5}{3}$

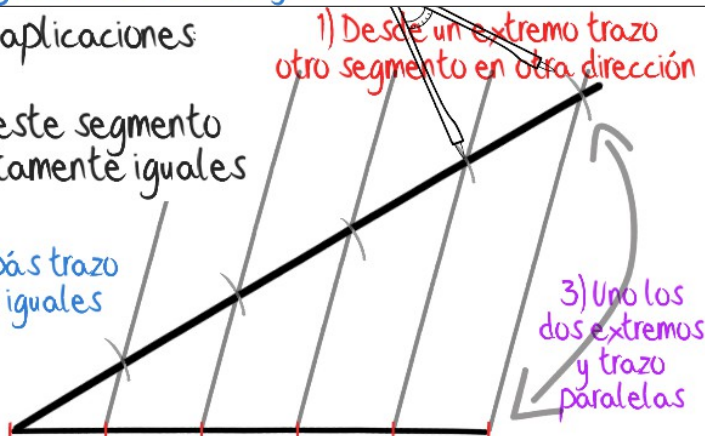
Como no se cumple uno de los tres criterios, no se cumple ninguno. No son semejantes

Esta igualdad si se cumple ($18=18$), pero... $32 \neq 30$

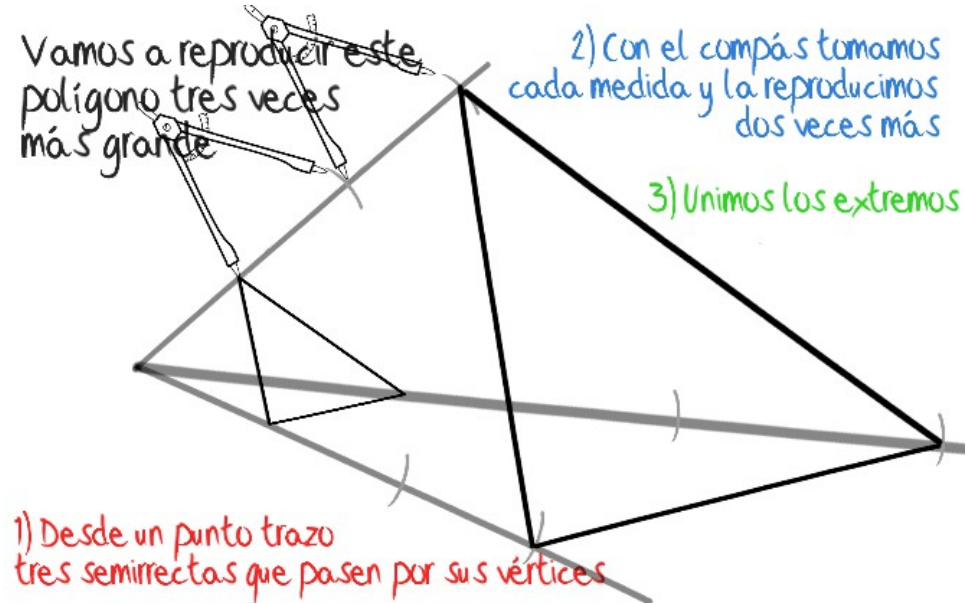
Veamos algunas aplicaciones:

Vamos a dividir este segmento en 5 partes exactamente iguales

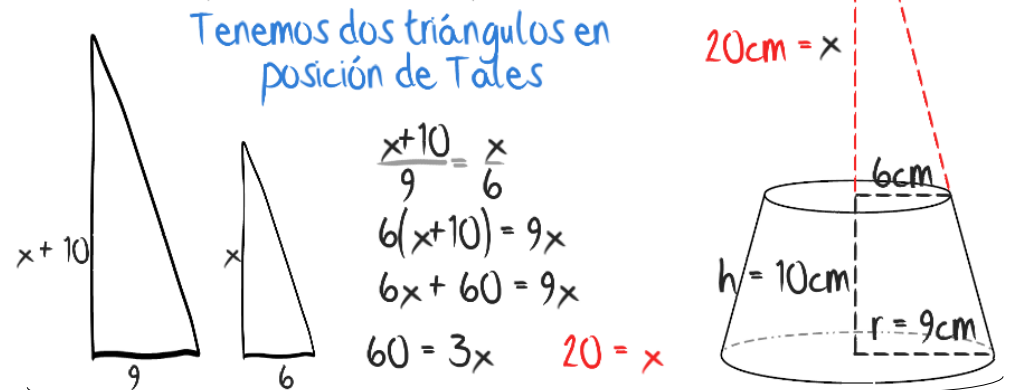
2) Con un compás trazo 5 segmentos iguales



3) Uno los dos extremos y trazo paralelas

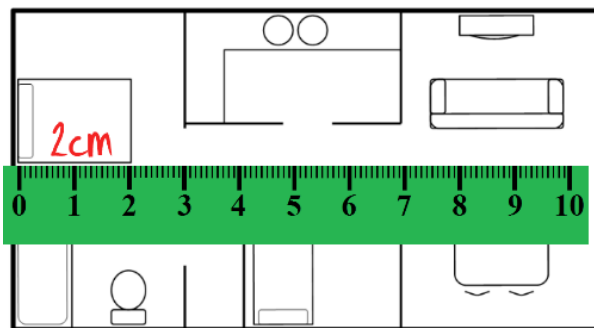


Y por último, vamos a ver cómo podemos descubrir la altura del cono seccionado en un tronco de cono (extensible para troncos de pirámides)



VOLUMEN DEL TRONCO = VOLUMEN DEL CONO GRANDE - VOLUMEN DEL CONO CHICO

$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{cono G}} - V_{\text{cono C}} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 30}{3} - \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 20}{3} = 810\pi - 240\pi = 570\pi = 1790.71 \text{ cm}^3$$

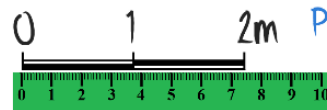


Escala 1:75

¿Cuánto mide de largo la cama principal?

$$2 \times 75 = 150\text{cm} = 1'5\text{ m}$$

Es relativamente sencillo pasar de una escala a otra



Para pasar a la escala numérica bastará con ver cuántas veces es mayor la medida real que la del plano

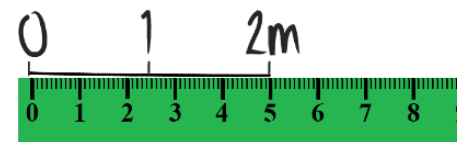
Si 75mm del plano son 2000mm reales

$$\text{La razón de semejanza es } 2000/75 = 80/3 \approx 26'67$$

Tenemos una escala 1:26'67, o 380 si lo preferimos con enteros

Para pasar de la escala numérica a la gráfica, bastará con que pintemos una escala r veces más pequeña:

Si tenemos una escala 1:40, la razón de semejanza (r) es 40
 $2000\text{mm}/40 = 50\text{mm}$



ESCALA 9:2

¿Cuánto mide este pendiente de diseño?

En estos casos más complicados, conviene recurrir a una regla de tres

Como 9cm del plano son 2cm reales

PLANO REALIDAD

9

2

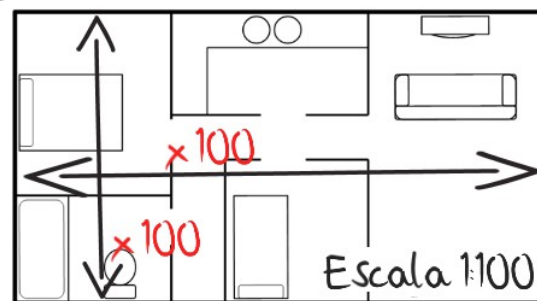
$$9x = 6 \cdot 2$$

6

x

$$x = 12/9 \approx 1'33\text{ cm}$$

3

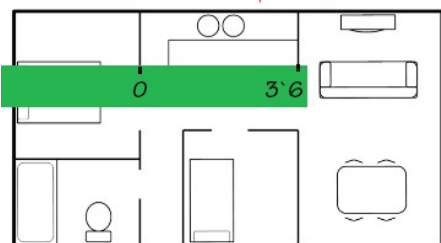


Al multiplicar por 100 las dos dimensiones, el área se multiplica por 100^2

La razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza

Otra opción es que aparezca una escala gráfica

Lo malo es que necesitamos tomar medidas y realizar reglas de tres para obtener las medidas reales



¿Cuánto mide de largo la cocina?

PLANO REALIDAD

(cm)

(m)

4'8

4

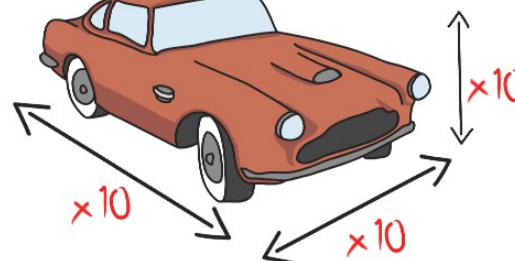
3'6

x

$$4'8x = 14'4$$

$$x = 14'4/4'8 = 3\text{m}$$

Si esta maqueta está a escala 1:10, su volumen real será 10^3 (1000) veces más grande



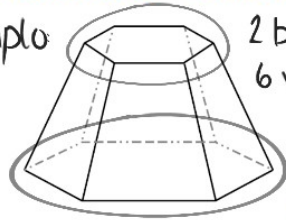
La razón entre los volúmenes es el cubo de la razón de semejanza

La RAZÓN es el cociente o división entre medidas

GEOMETRÍA 6

Relación de Euler $CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2$

Por ejemplo:



2 bases + 6 trapecios laterales = 8 caras
6 vértices superiores + 6 inferiores = 12 vértices
6 aristas superiores + 6 inferiores + 6 laterales = 18 aristas

$$8 + 12 = 18 + 2 \quad \checkmark$$

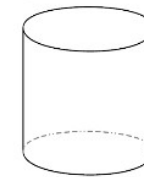
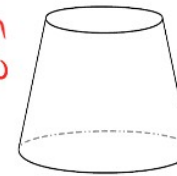


Área lateral de un cono recto

$$A = \pi r g$$

Área lateral de un tronco de cono recto

$$A = \pi(r + R)g$$

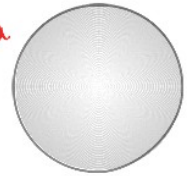


Área lateral de un cilindro recto

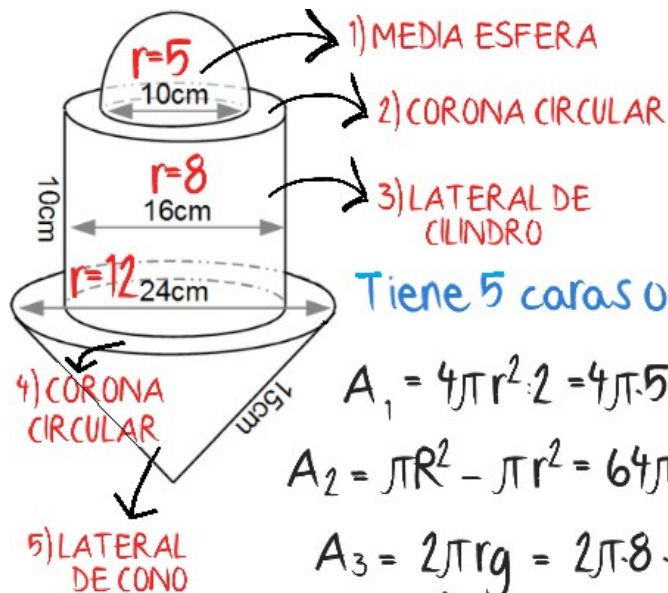
$$A = 2\pi r g$$

Área de una esfera

$$A = 4\pi r^2$$



4



Hallemos el área de la siguiente figura:

Tiene 5 caras o superficies

$$A_1 = 4\pi r^2 \cdot 2 = 4\pi \cdot 5^2 \cdot 2 = 50\pi \text{ cm}^2$$

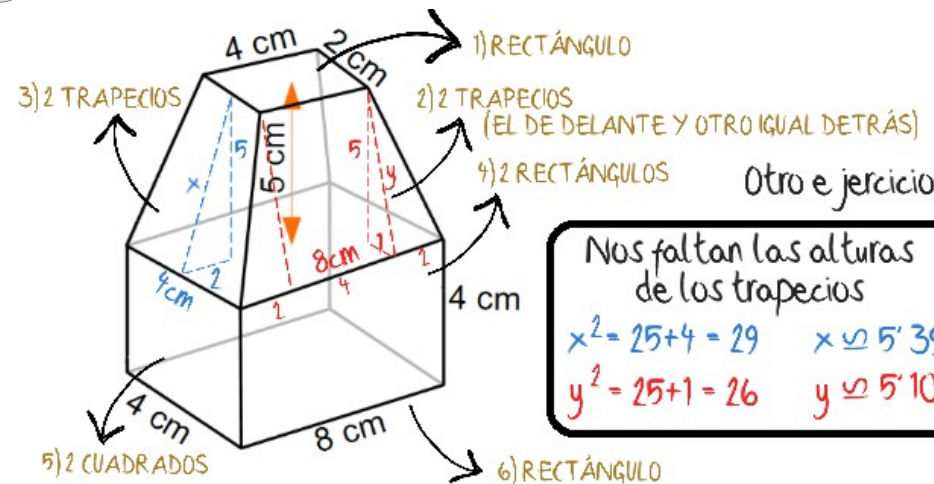
$$A_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = 64\pi - 25\pi = 39\pi \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 2\pi r g = 2\pi \cdot 8 \cdot 10 = 160\pi \text{ cm}^2$$

$$A_4 = \pi R^2 - \pi r^2 = 144\pi - 64\pi = 80\pi \text{ cm}^2$$

$$A_5 = \pi r g = \pi \cdot 12 \cdot 15 = 180\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 509\pi \text{ cm}^2 \approx 1598'26 \text{ cm}^2$$



Otro ejercicio

Nos faltan las alturas de los trapecios

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 + 4 = 29 & x &\approx 5'39 \text{ cm} \\ y^2 &= 25 + 1 = 26 & y &\approx 5'10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ya tenemos todas las medidas que necesitábamos

$$\Rightarrow A_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 2 \left[\frac{(4+8) \cdot 5'10}{2} \right] = 61'20 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 2 \left[\frac{(2+4) \cdot 5'39}{2} \right] = 32'34 \text{ cm}^2$$

$$A_4 = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$$

$$A_5 = 2 \cdot 4^2 = 32 \text{ cm}^2$$

$$A_6 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 229'54 \text{ cm}^2$$