CÁLCULO 10

Llamamos RADICAL a una raíz no operada, como por ejemplo $\sqrt[3]{7}$

Como muchas veces nos encontraremos que sus raíces son irracionales, en este vídeo aprenderemos algunas propiedades que nos ayudarán a operar con radicales, lo cual puede facilitar nuestros cálculos

Para ello, usaremos habitualmente los RADICALES EQUIVALENTES o IGUALES, que son aquellos que tienen la misma raíz, como por ejemplo

$$\sqrt{4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[4]{16} \dots$$

Todos esos radicales son equivalentes porque comparten la raíz 2. Ello nos permitirá cambiar unos por otros cuando nos convenga

Para fabricar radicales equivalentes, basta con multiplicar o dividir el índice y el exponente del radicando por un mismo número

Por ejemplo $\sqrt[3]{5^1} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[18]{5^6} \dots$

Multiplicamos ambos por 2 — por 3

Puedes comprobar con la calculadora que todas esas raíces resultan iguales

Para operar con radicales, también nos podemos ayudar de ciertas propiedades que cumplen, muy parecidas a las propiedades de las potencias

PRODUCTO DE RADICALES CON EL MISMO ÍNDICE	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	MULTIPLICAMOS LOS RADICANDOS
COCIENTE DE RADICALES CON EL MISMO ÍNDICE	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	DIVIDIMOS LOS RADICANDOS
POTENCIA DE UNA RAÍZ	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	EL EXPONENTE PASA AL RADICANDO
RAÍZ DE RAÍZ	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	MULTIPLICAMOS LOS ÍNDICES

Buscando los radicales equivalentes adecuados y aplicando estas propiedades, podemos reducir muchos radicales

Veamos unos ejemplos

$$\left(\sqrt[6]{2}\right)^2 \cdot \sqrt[2]{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{4 \cdot 16} = \sqrt[6]{64} = 2 \text{ y } -2$$

¿Y qué hacemos en este caso? ¡No coinciden los índices!

×4 ×3

$$\sqrt[3]{2^2} : \sqrt[4]{2^1} = \sqrt[12]{2^8} : \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^8 : 2^3} = \sqrt[12]{2^5}$$

Como el m.c.m(3,4) = 12...

En estos casos buscamos radicales equivalentes con el mismo índice

A veces, bastará con simplificar índices y exponentes

entre 4 — entre 2

$$\sqrt[12]{3^8} : \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3^2} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^2 : 3} = \sqrt[3]{3}$$

Hagamos otro ejercicio. En este caso, m.c.m(5,4,2) = 20

$$\frac{\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[20]{6^4} \cdot \sqrt[20]{18^5}}{\sqrt[20]{2^{10}}} = \sqrt[20]{\frac{6^4 \cdot 18^5}{2^{10}}} = \sqrt[20]{\frac{(2\cdot3)^4 \cdot (2\cdot3^2)^5}{2^{10}}} = \sqrt[20]{\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^5 \cdot 3^{10}}{2^{10}}} = \sqrt[20]{\frac{3^{14}}{2}}$$

Para resolver la fracción que nos ha quedado en el radicando, lo suyo es que factoricemos las bases, como ya hicimos en vídeos anteriores

Para sumar o restar radicales no tenemos ninguna propiedad. Sin embargo, si intentamos sacar factores fuera del radical, es posible que encontremos radicales semejantes que podamos sumar o restar. Veamos cómo hacerlo.

Podemos separar la raíz de un producto en el producto de raíces

$$\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2^3\cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$= \sqrt[3]{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}$$

En la práctica, cada vez que tengamos en el radicando tantos factores repetidos como indique el índice, sacamos uno fuera

Hagamos un ejercicio de sumas y restas de radicales. Recuerda que, al no tener una propiedad para sumas y restas, solo queda sacar factores fuera de los radicales y ver qué pasa:

$$3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2000} =$$

$$= 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^4} + 5\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2^4\cdot 5^3} =$$

$$= 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2^2} + 2\cdot 2\cdot 5\sqrt[3]{2} =$$

$$= (3 - 2 + 20)\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2^2} =$$

$$= 21\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4}$$

Debemos factorizar los radicandos para poder encontrar los factores que se repiten

Tras sacar los factores, vemos tres radicales repetidos

Podemos sumar y restar sus coeficientes

La pena es que no tengamos propiedades para operar cuando coinciden los radicandos. Pero en estos casos, podemos transformar cualquier radical en una potencia de la siguiente manera:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$$

De esta forma, los radicandos pueden transformarse en bases, y eso nos permite usar todas las propiedades de las potencias, que son más amplias. Vamos a comprobarlo en el siguiente ejercicio

$$\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{4}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2^1}\cdot\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2^{1/3}\cdot 2^{2/6}}{2^{3/4}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{6}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{-1}{12}} = \frac{1}{2^{1/12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

Si te fijas, 2, 4 y 8 son potencias de 2

NUNCA SE DEJAN SOLUCIONES CON EXPONENTES NEGATIVOS O FRACCIONARIOS

El último resultado ha quedado $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\cdot\frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{\sqrt[12]{2^{11}}} = \frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{\sqrt[12]{2^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{2}$

Si multiplicamos numerador y denominador por el radical adecuado, conseguimos RACIONALIZAR el resultado, es decir, dejar la fracción con el denominador natural

Lo idóneo es presentar todos los resultados racionalizados