

Empezaremos con dos interesantes teoremas

ECUACIONES 6

TEOREMA DEL RESTO

Al dividir un polinomio $P(x)$ entre " $x-a$ ", obtenemos de resto $P(a)$

Por ejemplo, vamos a comprobarlo dividiendo

$$P(x) = x^3 - 2x + 3 \text{ entre } x+2 \text{ ("}x-(-2)\text{")}$$

Es una división que podemos realizar por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}$$

Veamos si coincide con $P(-2)$, es decir, el valor numérico de $P(x)$ para $x=-2$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 3 = -8 + 4 + 3 = 7 - 8 = -1$$

Ya sabemos que el resto es "-1"

Efectivamente, obtenemos lo mismo

Pues una consecuencia inmediata es

TEOREMA DEL FACTOR

Si $P(a) = 0 \iff "x-a"$ es un factor (o divisor) de $P(x)$

"a" es una solución de la ecuación $P(x) = 0$

ESTAS CINCO AFIRMACIONES SON TODAS EQUIVALENTES

ya que $P(x) : (x-a)$ tiene de resto $P(a) = 0$

Decimos que "a" es una RAÍZ de $P(x)$

Veamos un ejemplo

$$\text{Sea } P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

Comprobando la división...

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2) \cdot (x^2 - 2x - 3)$$

... vemos que es un factor

Acabamos de comprobar que $x=2$ es solución de la ecuación $P(x) = 0$

Dividamos por Ruffini $P(x) : (x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 = R \end{array}$$

Podemos decir que 2 es una raíz de $P(x)$

Usemos lo anterior para resolver unos ejercicios

1. Halla "k" para que $Q(x) = x^3 - 4x + k$ sea un múltiplo de $x+3$

Si $Q(x)$ es un múltiplo de $x+3$ (" $x-(-3)$ ")
 $x+3$ tiene que ser un divisor (factor) de $Q(x)$
 y por el teorema del factor: $Q(-3) = 0$

$$Q(-3) = (-3)^3 - 4(-3) + k = -27 + 12 + k = k - 15$$

Como tiene que valer 0, $k=15$

2. ¿Cuánto vale "c" si al dividir $R(x) = x^3 - 7x^2 + cx^2 + 6$ entre $x+1$, obtenemos de resto 5?

Podríamos afrontar la división por Ruffini: $1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -7 \ 0 \ c \ 0 \ 0 \ 6$

Pero parece más razonable aplicar el teorema del resto, que nos asegura que $P(-1)=5$

$$P(-1) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + c(-1)^2 + 6 = -1 + 7 - c + 6 = 12 - c = 5 \longrightarrow c=7$$

COMPROBEMOS QUE POR RUFFINI OBTENEMOS LO MISMO

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & c & 0 & 0 & 6 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 & -6 & b-c & c-6 & b-c \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -6 & 6 & c-6 & b-c & c-6 & 12-c=5 ; c=7 \end{array}$$

Y como el resto tenía que valer 5, tenemos el mismo resultado

El teorema del factor nos abre la posibilidad de factorizar polinomios, igual que factorizábamos números enteros

Podemos encontrar raíces ("a") tanteando por Ruffini, que se transformarán en factores del polinomio (" $x-a$ ")

Encontraremos raíces cada vez que consigamos un resto 0, y eso solo lo podemos conseguir si el candidato a raíz es un divisor del término independiente, ya que...

POSIBLE RAÍZ	FACTORES DEL POLINOMIO					TI
	...	...	...	...	...	n
a	...	...	...	...	...	am
	...	...	...	...	m	0

... para que $n+am$ valga 0, a tiene que valer $-n/m$, es decir, a tiene que ser un divisor de n

Intentemos factorizar $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

Problemas primero por 1



Problemas con -1

Ya solo queda probar con -2

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\
 & & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\
 & & 1 & 3 & 4 & \\
 & & & 1 & 3 & 4 \\
 & & & & 6 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & -1 & & -1 & -1 & 0 \\
 \hline
 & & 1 & 1 & 0 & 2
 \end{array}$$

Busquemos raíces por Ruffini
Los candidatos son los divisores de "-2": 2, -2, 1 y -1
Ya tenemos un factor " $x-1$ ".
Problemas si hay otro imposible, con todos los términos positivos, el candidato debe ser negativo

Y tenemos otro factor " $x+2$ ".
Veamos si se repite

Pues nos hemos quedado sin candidatos enteros
 $x^2 + 1$ es IRREDUCIBLE

$$P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x^2+1)$$

Ya tenemos la factorización realizada

Factorizar nos permitirá resolver ecuaciones de grado 3, 4, 5, etc.

$$\frac{3(x^6 - x^3)}{2} = 3x^2(2x^2 - 1)$$

1. Como siempre, empezamos con el ABC y "quitamos" denominadores

$$3x^6 - 3x^3 = 12x^4 - 6x^2$$

2. Todo a un miembro, ordenado y reducido

$$3x^6 - 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 0$$

3. Extraemos factor común todo lo posible

$$3x^2(x^4 - 4x^2 - x + 2) = 0$$

4. Sacamos factores al polinomio

En nuestro caso, vamos a encontrar dos

"1 1 -1" ya es irreducible

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\
 & & -1 & 1 & 3 & -2 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\
 & & 2 & 2 & -2 & \\
 & & & 1 & 1 & -1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -1 & 0 &
 \end{array}$$

Factorizar polinomios nos va a permitir simplificar FRACCIONES ALGEBRAICAS

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x^2+1)}{(x-1) \cdot (x+2)} = x^2 + 1$$

...incluso, operar entre ellas

$$\frac{x-2}{x^2-1} - \frac{x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x-2}{(x-1) \cdot (x+1)} - \frac{x}{(x-1) \cdot (x^2+1)}$$

Multiplicamos cada fracción, arriba y abajo, por los factores que le falten del denominador de la otra fracción

$$= \frac{(x-2) \cdot (x^2+1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} - \frac{x \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x^2+1) \cdot (x+1)} = \frac{(x^3 - 2x^2 + x - 2) - (x^2 + x)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)}$$

Si el numerador no fuese irreducible, podríamos intentar simplificar

$$\text{Nos ha quedado } 3x^2(x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2+x-1) = 0$$

5. Si esos 4 factores multiplicados dan 0, uno de ellos vale 0:

$$0 \cdot 3x^2 = 0 ; x_1 = 0$$

$$0 \cdot (x+1) = 0 ; x_2 = -1$$

$$0 \cdot (x-2) = 0 ; x_3 = 2$$

$$0 \cdot x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1) = 5 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow x_4 = 0.618... \rightarrow x_5 = -1.618...$$

Finalmente, hemos encontrado 5 soluciones de una ecuación de grado 6

Podemos encontrar tantas soluciones como indique el grado de la ecuación

No siempre podremos encontrar raíces enteras probando con Ruffini, pero se intentará

Factorizamos los denominadores

$$\begin{array}{r|rrr}
 1 & 1 & 0 & -1 \\
 & & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 & & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

Los candidatos son 1 y -1 en ambos "1 0 1": Ya vimos que era irreducible