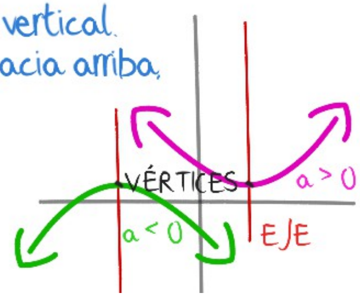
FUNCIONES 3

En este capítulo vamos a estudiar las funciones polinómicas de segundo grado, ya que sus gráficas son siempre parábolas. Si ordenamos y reducimos, siempre podemos presentarlas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

(siendo "a", "b", y "c" números cualesquiera, como en las ecuaciones de segundo grado)

El eje de estas parábolas es siempre vertical.
Si $a > 0$, las ramas de la parábola van hacia arriba.
Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo

El punto más alto o bajo de la parábola es el VÉRTICE



Analicemos la función $f(x) = -2(x - x^2/8) + 3$

Como es polinómica de segundo grado, la ordenamos y reducimos, y se queda $f(x) = x^2/4 - 2x + 3$

Tenemos que $a = 1/4$, $b = -2$, y $c = 3$

Ya sabemos que, al ser el valor "a" positivo, sus ramas van hacia arriba

1 Lo primero que buscamos de una parábola es su vértice.
La primera coordenada es $\boxed{x_v = -b/2a}$

La segunda coordenada del vértice, como todo punto de la gráfica, será la imagen de la primera coordenada: $f(x_v)$

En nuestro caso, $x_v = \dfrac{-(-2)}{2\cdot(1/4)} = \dfrac{2/1}{2/4} = 8/2 = 4$

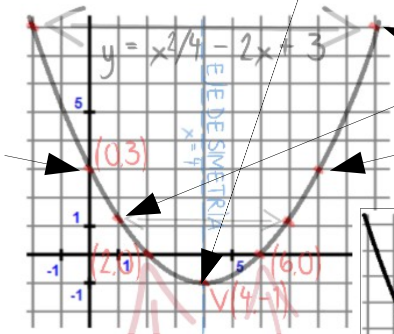
Por lo tanto, $y_v = f(4) = 4 - 8 + 3 = -1$

Ya sabemos que el vértice se encuentra en el punto $V(4,-1)$

Y la recta $x=4$ es su eje de simetría

2 Lo siguiente que buscamos es sus cortes con los ejes.
Al eje de ordenadas siempre lo cortará en $(0, f(0))$, es decir, en $(0,c)$

Al eje de abscisas no siempre lo corta (en nuestro caso sí, ya que $a > 0$, y el vértice está por debajo del eje). Si lo corta, tiene que ser en las posibles antiimágenes de 0, y para encontrarlas igualamos la función a 0 y resolvemos la ecuación



$x^2/4 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 3 = 1$

$x = \dfrac{2 \pm 1}{2/4}$ ↗ $x_1 = 6$, ↘ $x_2 = 2$

Podemos comprobar que $f(2) = f(6) = 0$

3 Finalmente, obtenemos algunos puntos más para completar la curva. Siempre intentaremos conseguir tres puntos a cada lado del vértice.

A la izquierda ya tenemos dos. Hallamos otro:
$f(1) = 1/4 - 2 + 3 = 1'25$

A la derecha necesitamos dos más:
$f(8) = 16 - 16 + 3 = 3$
y $f(10) = 25 - 20 + 3 = 8$

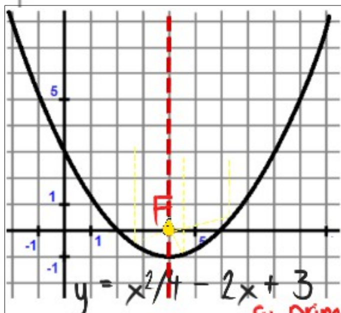
La simetría se puede aprovechar para obtener nuevos puntos

Y finalmente unimos los puntos

¿Quieres saber dónde estaría su foco?

Está claro que estará encima del vértice, por lo que su primera coordenada será igual: $\boxed{x_F = -b/2a}$

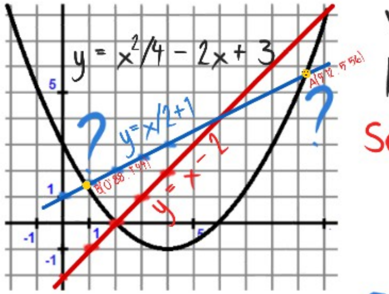
Su segunda coordenada se obtiene aplicando la siguiente fórmula: $\boxed{y_F = c + \dfrac{1 - b^2}{4a}}$



En nuestro caso, ya sabemos que su primera coordenada es 4, y aplicando la última fórmula:

$y_F = 3 + (1-4)/(4/4) = 3 - 3/1 = 0$

Luego, tenemos el foco en el punto $(4,0)$



Veamos dónde se corta nuestra parábola con la recta $y = x - 2$

pendiente 1

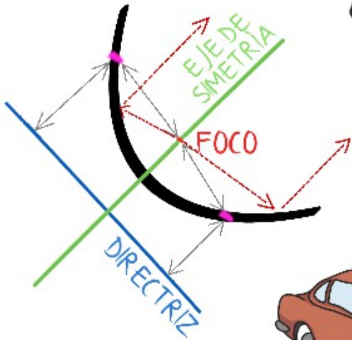
Se observa claramente que se cortan en los puntos A(2,0) y B(10,8)

¿Y con la recta $y = x/2 + 1$?

En esta ocasión no resulta sencillo encontrar las coordenadas de los puntos de corte

Una parábola es una curva que tiene la siguiente propiedad:

Todos sus puntos están a la misma distancia del foco (un punto) que de la directriz (una recta)



Su mayor utilidad consiste en que todo elemento que salga del foco rebotará en la curva y tomará la misma dirección que el eje de simetría

Eso permite que los focos de los coches proyecten su luz recta, enfocada a la carretera,

y concentrar la señal en el receptor de una antena parabólica

Para encontrar dónde se cortan las gráficas de dos funciones, tenemos un método mejor que representarlas gráficamente

Las gráficas de dos funciones se cortarán si existen valores que tengan la misma imagen en ambas, es decir, cuando ambas fórmulas se igualen

Busquemos el corte de nuestra parábola y la recta $y = x/2 + 1$

Igualamos las fórmulas y resolvemos la ecuación:

$$x^2/4 - 2x + 3 = x/2 + 1$$

$$x^2/4 - 5x/2 + 2 = 0$$

Multiplico por 4 y quito denominadores

$$x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Delta = 100 - 32 = 68$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{68}}{2} \begin{cases} x_1 = 9'123... \\ x_2 = 0'877... \end{cases}$$

Si hallamos sus imágenes, obtenemos aproximadamente los puntos A(9'12 , 5'56) y B(0'88 , 1'44) en ambas funciones

Cuando busques los cortes de una parábola con otra, o con una recta, verás que se genera una ecuación de segundo grado. Esta ecuación puede tener 2 soluciones, una o ninguna, ya que dos parábolas, o una parábola y una recta, pueden cortarse en 2 puntos, uno o ninguno.