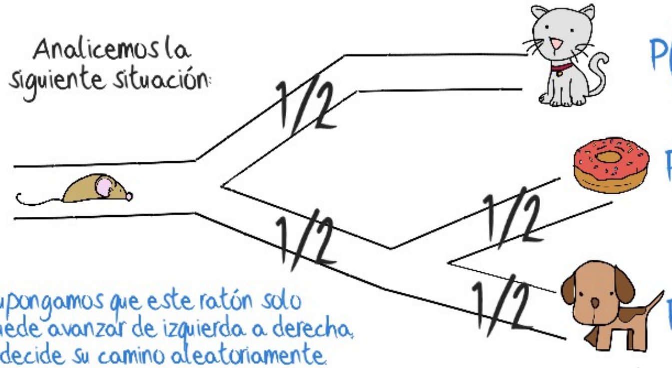
Analicemos la siguiente situación:



$P(\text{gato}) = 1/2$

$P(\text{rosco}) = (1/2)^2 = 1/4$

$P(\text{perro}) = (1/2)^2 = 1/4$

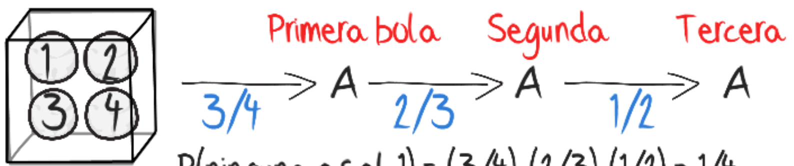
Supongamos que este ratón solo puede avanzar de izquierda a derecha, y decide su camino aleatoriamente.

Es un experimento aleatorio. El espacio muestral es {gato, rosco, perro}.
Sin embargo, estos sucesos no son equiprobables.
La probabilidad de encontrarse al gato es 1/2.
Mientras que la probabilidad de encontrase al rosco o al perro es de la mitad.

Esta técnica, la de asociar cada rama del diagrama con su probabilidad correspondiente, para multiplicar después las probabilidades del camino de cada suceso, nos permitirá estudiar sucesos mucho más complejos de una forma sencilla.

Recordemos este experimento del primer vídeo de probabilidad:
¿Cuál es la probabilidad de que saquemos tres bolas y no salga el 1?

No hace falta que representemos el diagrama entero.
Sea A = No sale el 1



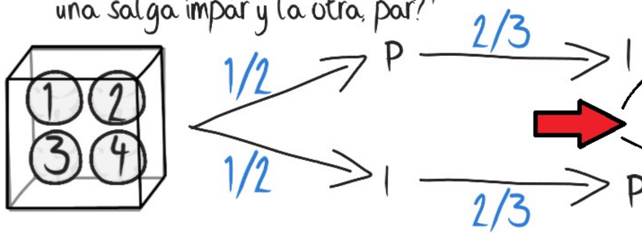
$P(\text{ninguna es el } 1) = (3/4)\cdot(2/3)\cdot(1/2) = 1/4$

La probabilidad de que no salga el 1 es de 1/4.
Es la misma probabilidad de que el 1 se quede en la urna al sacar tres bolas!!!

En probabilidad hay muchos caminos para resolver el mismo problema

---

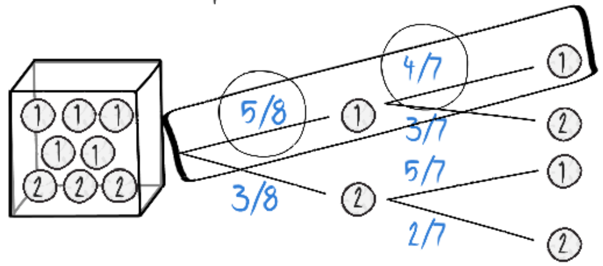
¿Cuál será la probabilidad de que, al sacar dos bolas, una salga impar y la otra, par?



$P(\text{una par y otra impar}) = (1/2)\cdot(2/3) + (1/2)\cdot(2/3) = 4/6 = 2/3$

PROBABILIDAD 3

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas con un 1?



Es decir, hallar la probabilidad de que la primera bola fuese un 1

Y la probabilidad de que la segunda bola fuese un 1, si con la primera bola ya había salido un 1

$P(\text{sacar dos unos}) = (5/8)\times(4/7) = 20/56 = 5/14$

Ni siquiera nos hacía falta representar el diagrama entero.
Nos habría bastado con representar el camino que nos interesaba.

Es lo que se conoce como PROBABILIDAD CONDICIONADA. Formalicémoslo

Sea A = Sacar un 1 con la primera bola
y B = Sacar un 1 con la segunda bola

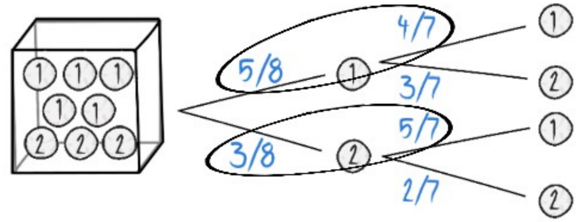
$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B/A)}$$

"/" significa "si", "condicionado a"...

Habría bastado con aplicar dicha fórmula para resolver el problema

---

¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea un 1?



A este tipo de problemas, donde tenemos que sumar los distintos caminos que conducen a la solución, podemos considerarlos de PROBABILIDAD TOTAL

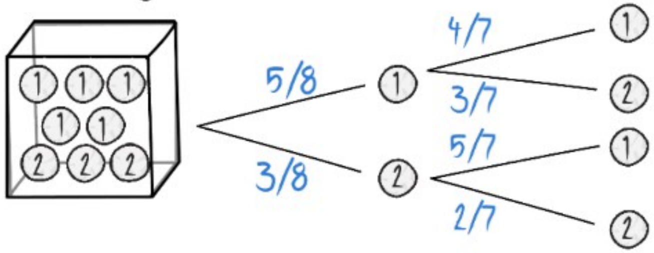
Ahora tenemos que sumar los dos caminos que llevan a la consecución de nuestro suceso

$P(\text{Sacar un 1 con la segunda bola}) = (5/8)\cdot(4/7) + (3/8)\cdot(5/7) =$

$= 20/56 + 15/56 = 35/56 = 5/8$

La probabilidad de sacar un 1 con la segunda bola es de 5/8 (como nos podíamos haber imaginado)

¿Cuál será la probabilidad de que la primera bola sea un 1, si la segunda bola sale un 1?



Sea A = Sacar un 1 con la primera bola

y B = Sacar un 1 con la segunda bola

La fórmula anterior también funciona aunque cambiemos A por B

Como $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \longrightarrow P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{5/14}{5/8} = 4/7$

Por los dos ejercicios anteriores sabemos que

La probabilidad de que la primera bola sea un 1, si la segunda lo ha sido, es de 4/7

Pero no siempre podremos recurrir a los diagramas en problemas de probabilidad condicionada

Si la probabilidad de ganar al colar tres goles es 3/4 y la probabilidad de colar 3 goles es 1/9, ¿cuál es la probabilidad de ganar y meter 3 goles?

Sea A = Ganar
B = Colar 3 goles

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = (1/9) \cdot (3/4) = 1/12$

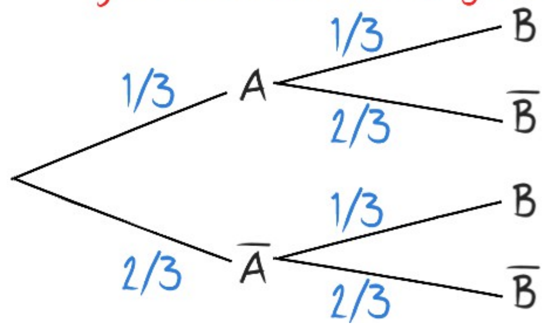
¿Y cuál es la probabilidad de ganar, sabiendo que la probabilidad de colar 3 goles si se gana es de 1/5?

$P(A) = P(A \cap B) \,/\, P(B/A) = (1/12) \,/\, (1/5) = 5/12$

Si lanzamos dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que en los dos dados salgan múltiplos de 3?

Antes, hubiésemos representado los 36 sucesos elementales.

Ahora: Sea A = Sacar 3 o 6 con el primer dado
y B = Sacar 3 o 6 con el segundo dado



En este caso $P(B/A) = P(B)$

Es decir, a B no le afecta para nada que suceda, o no, el suceso A.

Decimos que A y B son INDEPENDIENTES

$$\boxed{\text{Cuando A y B son independientes} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

$P(A \cap B) = (1/3)^2 = 1/9$

La probabilidad es de 1/9

¿Y cuál será la probabilidad de obtener siempre un múltiplo de 3, si tiro 100 dados? Extendiendo este razonamiento, podemos asegurar, sin necesidad de ningún diagrama, que será de $(1/3)^{100}$

Muchas veces, nos resulta difícil apreciar si dos sucesos son independientes. La fórmula anterior nos puede sacar de dudas, ya que, si no se cumple, no habrá independencia

Por ejemplo, sabiendo que la probabilidad de aprobar Lengua es de 0'7, la probabilidad de aprobar Matemáticas es de 0'8, y la probabilidad de aprobar una u otra es de 0'9, ¿son independientes los sucesos "aprobar Lengua" y "aprobar Matemáticas"?

Sea L: aprobar Lengua, y M: aprobar Matemáticas

Necesitamos la probabilidad de la intersección para poder comprobar si se cumple la fórmula

Sabemos que: $P(L) + P(M) = P(L \cup M) + P(L \cap M)$

Por lo tanto: $0'7 + 0'8 = 0'9 + P(L \cap M)$

Despejando: $P(L \cap M) = 0'6$. Como es distinto a $P(L) \cdot P(M) = 0'56$, podemos asegurar que no son sucesos independientes