CÁLCULO 12

Imagínate que se te presenta en un problema la siguiente ecuación:

$3^x = 18$ ¿A qué elevo 3 para que me dé 18?

Evidentemente, no se trata de una solución entera, ni siquiera sencilla

Pues para resolver este tipo de situaciones, se inventó el operador LOGARITMO:

Con ayuda de una calculadora científica, podemos resolverlo $\log_3 18 \simeq 2'631$

El logaritmo en base "b" de "r" podemos definirlo como $\boxed{\log_b r = x \Longleftrightarrow b^x = r}$

A los logaritmos de base 10 se les llama LOGARITMOS DECIMALES y se escriben sin base. Por ejemplo $\log 100 = 2$ ¿A qué elevo 10 para que me dé 100?

A los logaritmos de base e=2'71828... se les llama LOGARITMOS NEPERIANOS, estos se escribe "ln" sin base. Por ejemplo $\ln 1 = 0$ ¿A qué elevo "e" para que me dé 1?

Ya hemos visto que algunos logaritmos podemos calcularlos sin la ayuda de la calculadora: $\log_3 27 = 3$ $\log 1000 = 3$

Sin embargo, muchos otros nos resultan imposibles $\log_3 20$

Simplemente sabemos que será un número entre 2 y 3

A partir de las propiedades de las potencias, podemos deducir algunas PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS, que nos pueden ayudar a resolver ciertos logaritmos sin ayuda de la calculadora

$\log_b b = 1$ $\log_7 7 = 1$ $\log_b 1 = 0$ $\log_7 1 = 0$	$\log_b (r\cdot s) = \log_b r + \log_b s$ $\log_2 (4\cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ $(5=2+3)$
$\log_b r^n = n\cdot\log_b r$ $\log_3 9^2 = 2\cdot\log_3 9$ $(4=2\cdot 2)$	$\log_b (r:s) = \log_b r - \log_b s$ $\log_2 (16:8) = \log_2 16 - \log_2 8$ $(1=4-3)$

Hagamos unos ejercicios

Factorizar suele ayudarnos, y también hallar la fracción generatriz

1) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5\cancel{\log_3 3}^{1}$

$\log_2 0'25 = \log_2(1/4) = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2$

Efectivamente: $2^{-2} = 1/2^2 = 1/4 = 0'25$

Si los resultados son enteros, siempre podemos comprobarlos

2) Sabiendo que $\log 5 = 0'70$ aproximadamente, calcula los siguientes logaritmos (contamos también con que $\log 10 = 1$)

$\log 500 = \log(5\cdot 100) = \log 5 + \log 100 = 0'70 + 2 = 2'70$

$\log 0'2 = \log(1/5) = \log 1 - \log 5 = 0 - 0'70 = -0'70$

$\log\sqrt{125} = \log (5^3)^{1/2} = (3/2)\cdot\log 5 = (3/2)\cdot 0'70 = 1'05$

$\log 2 = \log(10/5) = \log 10 - \log 5 = 1 - 0'70 = 0'30$

Conociendo los logaritmos de dos números, podemos obtener los de sus productos y cocientes

3) Resuelve la ecuación:

$$2\log_2 x - \log_2(x-1) + 3 = 5$$

Separemos los logaritmos de los demás términos

$$2\log_2 x - \log_2(x-1) = 5 - 3$$

Y aplicando las propiedades conocidas, unimos los logaritmos en uno: $\log_2 x^2 - \log_2(x-1) = 2$

$$\log_2 \frac{x^2}{x-1} = 2 \xLeftrightarrow{\text{Por la definición}} 2^2 = \frac{x^2}{x-1}$$

De donde: $4(x-1) = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ La única solución es $-b/2a = 4/2 = 2$

Comprobamos: $2 \cdot 1 - 0 + 3 = 5$; $2+3=5$ ✓

Aún tenemos una propiedad más, muy útil, ya que nos permitirá cambiar de base a nuestro antojo:

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

Y nosotros podemos elegir "a" con el valor que queramos

Cuando tenemos que recurrir a la calculadora, puede ser que nos encontremos que tan solo resuelve logaritmos decimales o neperianos, por lo que resultará imprescindible recurrir al cambio de base. Por ejemplo:

$$1'89278... = \frac{2'079...}{1'098...} = \frac{\ln 8}{\ln 3} = \log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} = \frac{0'903...}{0'477...} = 1'89278...$$

Incluso, esa propiedad, puede ayudarnos a resolver muchos logaritmos sin necesidad de calculadora:

$$\log_3 7 \cdot \log_7 3 = \frac{\cancel{\log 7}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 7}} = 1$$

Hagamos unos ejercicios: Como 8 y 4 son potencias de 2...

$$\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{2}{3}$$

Efectivamente, $8^{2/3} = \sqrt[3]{64} = 4$

$$\log_9 \sqrt{27} = \frac{\log_3 3^{3/2}}{\log_3 3^2} = \frac{3/2}{2} = 3/4$$

$\sqrt{27} = (3^3)^{1/2}$

Recordemos que $\log 5 \simeq 0'70$

$$\log_3 5 \cdot \log 27 = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \log 3^3 = \frac{\log 5 \cdot 3 \cancel{\log 3}}{\cancel{\log 3}} = 2'10$$

$$0 = \frac{\log 20}{\log 5} = \frac{\log(100/5)}{\log 5} = \frac{\log 100 - \log 5}{\log 5} =$$

$$= \frac{2 - 0'70}{0'70} \simeq 1'86$$