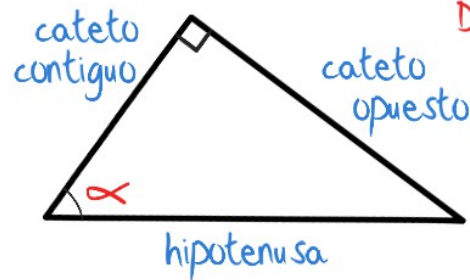


Sea un triángulo rectángulo



Definimos las razones trigonométricas (SENO, COSENO Y TANGENTE) de la siguiente manera:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

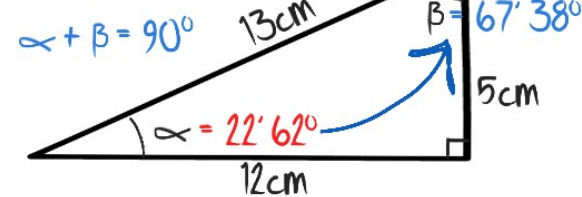
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. contiguo}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cat. contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Todos los triángulos rectángulos con los mismos ángulos son semejantes, por lo que tienen las mismas razones trigonométricas

GEOMETRÍA 9

Hagamos unos ejercicios



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Sabemos que $\text{sen } \alpha = 5/13$

Si le introducimos ese valor a la calculadora, y pulsamos sen^{-1} nos dirá que corresponde a un ángulo de $22' 62''$ aproximadamente
Y como ambos ángulos son complementarios...

Halla los ángulos
Como cumple el teorema de Pitágoras,
 $25 + 144 = 169$
ya sabemos que tiene un ángulo recto, y gracias a las razones trigonométricas obtendremos los otros

1

En Matemáticas por comodidad, escribiremos

$$(\text{sen } \alpha)^2 = \text{sen}^2 \alpha$$

Pues observa:

RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA

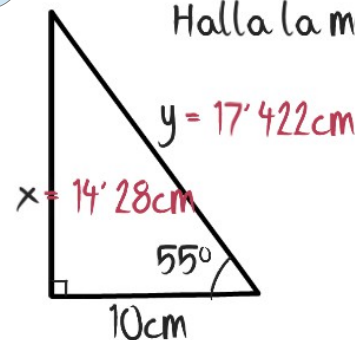
$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1}$$

$$= \frac{\text{cat. opuesto}^2}{\text{hipotenusa}^2} + \frac{\text{cat. contiguo}^2}{\text{hipotenusa}^2} = \frac{\text{hipotenusa}^2}{\text{hipotenusa}^2} = 1$$

Y además:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cat. contiguo}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cat. opuesto} \cdot \cancel{\text{hipotenusa}}}{\text{cat. contiguo} \cdot \cancel{\text{hipotenusa}}} = \text{tg } \alpha$$

Halla la medida de los otros dos lados



Sabemos que: $\text{cos } 55^\circ = 10/y$

Si hallamos el seno con ayuda de la calculadora, tenemos

$$0.574 = 10/y$$

Despeja "y": $y = 10/0.574$
 $y = 17.422\text{cm}$

Y también tenemos $\text{tg } 55^\circ = x/10$

La calculadora dice: $1.428 = x/10$; $x = 14.28\text{cm}$

Ahora trabajaremos sin calculadora:

1. Sabiendo que $\sin \alpha = 0.5$, halla su coseno y su tangente
Gracias a la relación fundamental de trigonometría, sabemos que:

$$0.5^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0.25 \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{0.75}$$

$$\cos \alpha = 0.866 ; \operatorname{tg} \alpha = 0.5 / 0.866 = 0.577$$

2. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 1.8$, halla su seno y su coseno

Como nos va a resultar una sistema de ecuaciones trigonométrico, es aconsejable plantearse un cambio de variables:

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin \alpha \\ y = \cos \alpha \end{array} \right\} \text{ y tendremos: } \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x/y = 1.8 \end{array} \right\} \rightarrow x = 1.8y$$

Por sustitución obtenemos que: $y = 0.486 = \cos \alpha$

$x = 0.874 = \sin \alpha$

Ya que estamos con ecuaciones, resuelve la siguiente:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot (2 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} = 1$$

Antes de precipitarnos con cambios de variables, debemos pensar en simplificar esa expresión para quedarnos con una única incógnita (solo tenemos una ecuación)

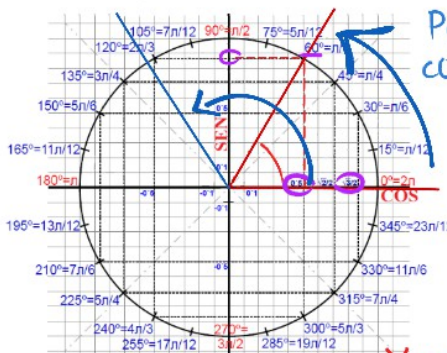
Las tangentes las convertimos en senos y cosenos

$$\frac{\sin \alpha \cdot (2 - \sin \alpha)}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1$$

Y los senos y los cosenos son fáciles de transformar cuando están al cuadrado, gracias a la relación fundamental

$$2 \sin \alpha - \cancel{\sin^2 \alpha} = 1 - \cancel{\sin^2 \alpha} ; \sin \alpha = 1/2 ; \alpha = 30^\circ$$

Para seguir profundizando en la trigonometría, vamos a ayudarnos de la circunferencia goniométrica: una circunferencia de radio 1, centrada en el origen de coordenadas



Para cualquier ángulo que formemos con el semieje positivo de abscisas, en el sentido contrario a las agujas del reloj, podremos leer su coseno en el eje de abscisas, y su seno sobre el eje de ordenadas

Y nos permitirá trabajar con las razones trigonométricas de cualquier ángulo, aunque sea mayor de 90°

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 60^\circ = 1/2$$

2

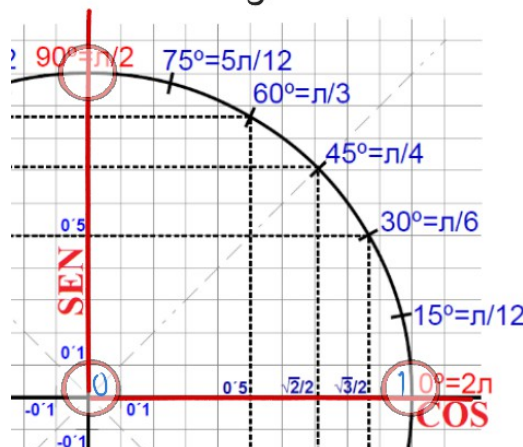
En la circunferencia que manejaemos en este vídeo, podrás observar los ángulos medidos en grados y RADIANTES, otra unidad de medida, tal que:

$$180^\circ = \pi \text{ radianes}$$

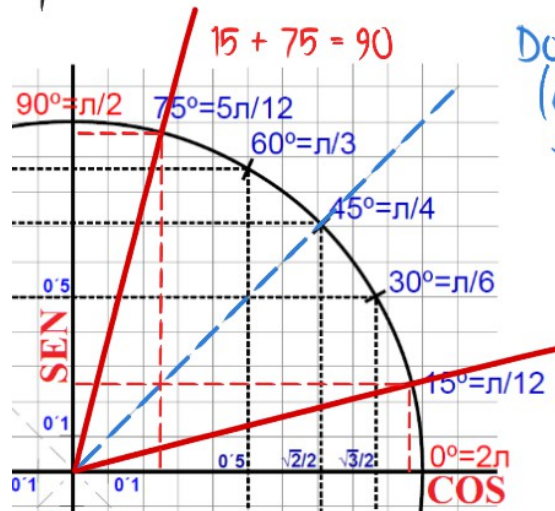
Con una sencilla regla de tres puedes pasar de una medida a la otra

Veamos cuáles son las razones trigonométricas notables (las de los ángulos más usuales):

ÁNGULO	SENO	COSENO	TANGENTE
0°	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$	0
30°	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$	-



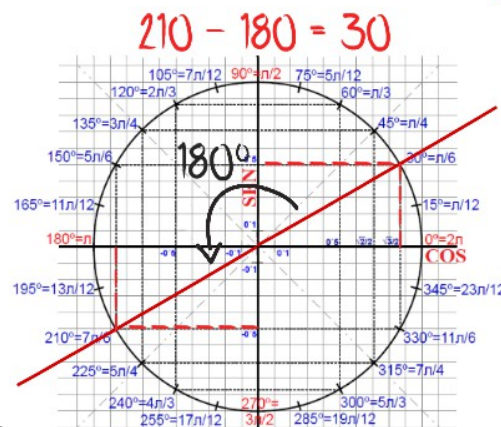
Podemos aprovechar las simetrías de la circunferencia para obtener las razones de otros ángulos. Por ejemplo:



Dos ángulos complementarios (que sumen noventa grados) siempre se intercambiarán el seno y el coseno

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \cos 15^\circ \\ \cos 75^\circ &= \sin 15^\circ\end{aligned}$$

Todo ángulo del tercer cuadrante tiene otro simétrico en el primero, porque difieren 180° . Tienen los senos y los cosenos opuestos



$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= 1/2 \\ \sin 210^\circ &= -1/2 \\ \cos 30^\circ &= 0.866 \\ \cos 210^\circ &= -0.866\end{aligned}$$

**TERCER CUADRANTE:
SENOS Y COSENOS
NEGATIVOS**

3

Todo ángulo del segundo cuadrante tiene otro simétrico en el primero: su suplementario (que suman 180°)

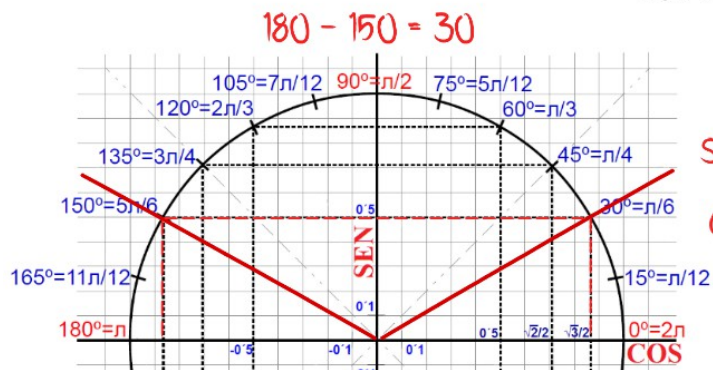
Tienen el mismo seno, y cosenos opuestos

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$$

$$\cos 30^\circ = 0.866$$

$$\cos 150^\circ = -0.866$$

**SEGUNDO CUADRANTE:
SENOS POSITIVOS
COSENOS NEGATIVOS**



Y todo ángulo del cuarto cuadrante tiene otro simétrico en el primero: su opuesto (suman 0° o 360°)

Tienen los cosenos iguales, y los senos opuestos

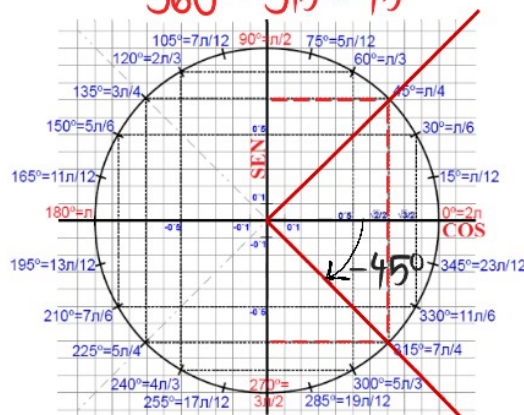
$$360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$$

$$\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = 0.707$$

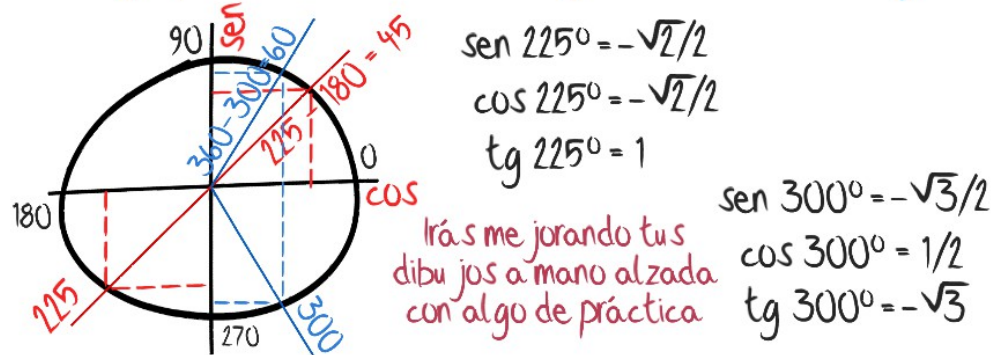
$$\sin 45^\circ = 0.707$$

$$\sin 315^\circ = -0.707$$

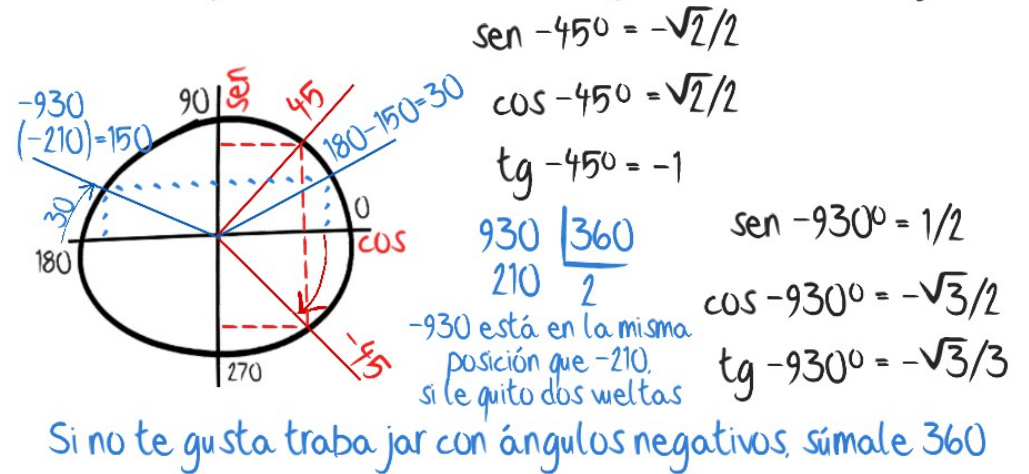
**CUARTO CUADRANTE:
SENOS NEGATIVOS
Y COSENOS POSITIVOS**



Jugando con las simetrías, y ayudándonos de dibujos, podemos trasladar las razones trigonométricas notables u otras que conozcamos, a multitud de ángulos de otros cuadrantes. Por ejemplo, halla las razones trigonométricas de 225° y 300°



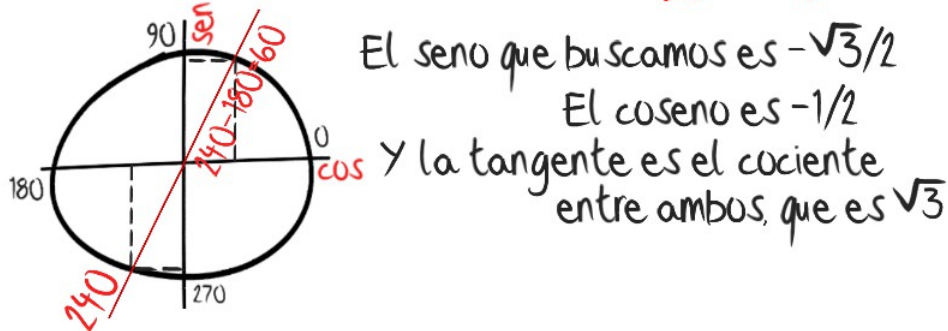
Y también negativos. Halla las razones trigonométricas de -45° y -930°



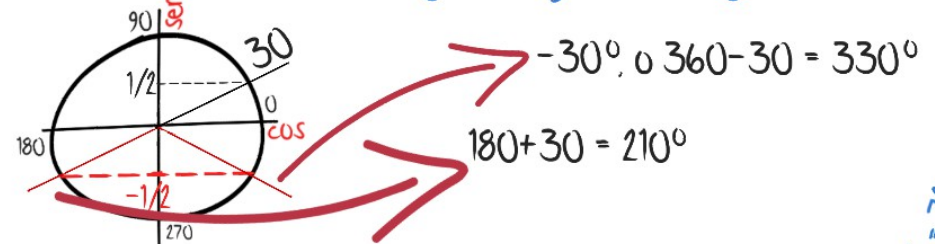
4

Y podemos hallar las razones trigonométricas de ángulos mayores de 360° (les "quitaremos" las vueltas para ubicarlos)

Problema: ¿Cuáles serán las razones trigonométricas de 165° si lo multiplicamos por 8? $165 \times 8 = 1320$
 $1320 : 360 = 3$ con resto 240 (da 3 vueltas y gira 240 grados más)



Halla todos los ángulos cuyo seno valga $-1/2$:



Sabiendo que $\text{sen } 18^\circ = 0'31$ aproximadamente, halla $\text{sen } 72^\circ = -0'95$

72° y 18° son complementarios. Por la relación fundamental:

$$\text{sen } 72^\circ = \text{cos } 18^\circ = \sqrt{1 - 0'31^2} = 0'95$$

