ECUACIONES 7

En este vídeo trabajaremos una técnica muy común en resolución de ecuaciones, que también se emplea en otros contextos: el CAMBIO DE VARIABLE

Vamos a empezar a aplicarlo en las ecuaciones BICUADRADAS:

$$3x^4 - 11x^2 - 4 = 0 \longrightarrow 48 - 44 - 4 = 0$$

Todos los exponentes son pares

Al ser de grado 4, deberíamos empezar a buscar raíces por Ruffini, factorizar...

Para trabajar con mayor comodidad, realizaremos el siguiente cambio de variable: $\boxed{t = x^2}$ Por lo que: $t^2 = (x^2)^2 = x^4$

En nuestra ecuación, sustituiremos TODAS las expresiones que dependan de "x" por expresiones que dependan de la nueva variable (en este caso usamos "t")

$$3t^2 - 11t - 4 = 0$$

Nuestra ecuación ahora es más sencilla. Procedemos a resolverla

$$\Delta = 121 - (-48) = 169 \qquad t = \frac{11 \pm 13}{6} \begin{cases} t_1 = 24/6 = 4 \\ t_2 = -2/6 = -1/3 \end{cases}$$

Y para rematar la faena, debemos deshacer el cambio ("t" no era nuestra incógnita)

Si $x^2 = 4$; $x = \pm 2$ Si $\cancel{x^2 = -1/3}$, no hay más soluciones

En las ecuaciones polinómicas, si todos los exponentes son múltiplos de "n", el cambio "$t = x^n$" es muy aconsejable

Por ejemplo: $x^9 = 3x^6 - 2$ Todos los exponenetes son múltiplos de 3

1. Realizo el cambio $\boxed{t = x^3}$ (y "x" desaparece de la ecuación)

$$\left.\begin{matrix} t^2 = x^6 \\ t^3 = x^9 \end{matrix}\right\} t^3 = 3t^2 - 2 \Longrightarrow t^3 - 3t^2 + 2 = 0$$

2. Resuelvo la ecuación (GRADO 3 FACTORIZO POR RUFFINI)

	1	-3	0	2
$t_1 = 1$		1	-2	-2
	1	-2	-2	0
Como ya es irreducible	a	b	c	

$(t-1)(t^2-2t-2) = 0$

De la ecuación de segundo grado tenemos las soluciones

$t_2 = 2'732$ $\qquad t_3 = -0'732$

3. Deshago el cambio $x = \sqrt[3]{t}$

$$x_1 = \sqrt[3]{1} = 1 \qquad x_2 = ... = 1'398 \qquad x_3 = ... = -0'901$$

Los cambios de variable nos permitirán convertir ecuaciones complejas en simples ecuaciones polinómicas

$$\frac{2^{2x-1} + 2}{5} = \frac{2^{x+1}}{4} \quad \text{¡Es una ecuación exponencial!}$$

Le "quitamos" los denominadores $4 \cdot 2^{2x-1} + 8 = 5 \cdot 2^{x+1}$

Le quitamos de los exponentes los términos independientes

$$4 \cdot 2^{2x}/2 + 8 = 5 \cdot 2^x \cdot 2^1$$

Y ahora...

1. Cambio de variable: $\boxed{t = 2^x}$ $\qquad 2 \cdot 2^{2x} + 8 = 10 \cdot 2^x$

Por lo que: $t^2 = (2^x)^2 = 2^{2x} \Longrightarrow 2t^2 + 8 = 10t$

2. Resuelvo (divido entre 2, traslado...)

$$\left.\begin{matrix} t^2 - 5t + 4 = 0 \\ \Delta = 25 - 16 = 9 \end{matrix}\right\} \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} t_1 = 8/2 = 4 \\ t_2 = 2/2 = 1 \end{cases}$$

3. Deshago el cambio

Si $t = 4$, tenemos $2^x = 4$; $x_1 = 2$

Si $t = 1$, tenemos $2^x = 1$; $x_2 = 0$

COMPROBAMOS

$x_1 = 2 \longrightarrow (8+2)/5 = 8/4$; $2 = 2$

$x_2 = 0 \longrightarrow (0'5 + 2)/5 = 2/4$; $0'5 = 0'5$

Probemos con una ecuación radical:

$$6 - \sqrt{x} = x$$

1. Realizo el cambio $\boxed{t = \sqrt{x}}$; $t^2 = (\sqrt{x})^2 = x$

$$6 - t = t^2 \Rightarrow -t^2 - t + 6 = 0$$

2. Resuelvo $\Delta = 1 - (-24) = 25 \Rightarrow \frac{1 \pm 5}{-2}$ $\begin{cases} t_1 = 6/-2 = -3 \\ t_2 = -4/-2 = 2 \end{cases}$

3. Deshago el cambio

Si $t = -3$, $\cancel{x_1 = 9}$ Si $t = 2$, $x_2 = 4$

COMPROBAMOS $\cancel{6 - 3 = 9}$ $6 - 2 = 4$ ✓

Otra técnica habitual con ecuaciones radicales es ir despejando los radicales para elevar los dos miembros al cuadrado

$$(-\sqrt{x})^2 = (x - 6)^2$$

Y conseguimos destruirlos $x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2$

Las mismas soluciones

Ordenado y reducido $\left.\begin{matrix} x^2 - 13x + 36 = 0 \\ \Delta = 169 - 144 = 25 \end{matrix}\right\} \frac{13 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 18/2 = \cancel{9} \\ x_2 = 8/2 = 4 \end{cases}$

Veamos otra: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x} - \sqrt{5x+6} = 0$

Al haber tres radicales distintos, el cambio de variable es imposible, por lo que iremos despejando radicales y elevando al cuadrado

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (\sqrt{5x+6} - \sqrt{2x})^2$$

$$3x - 2 = (\sqrt{5x+6})^2 - 2\sqrt{5x+6} \cdot \sqrt{2x} + (\sqrt{2x})^2$$

$$3x - 2 - 5x - 6 - 2x = -2\sqrt{2x(5x+6)}$$

$$-4x - 8 = -2\sqrt{10x^2 + 12x} \xrightarrow{(-2)} (2x+4)^2 = (\sqrt{10x^2 + 12x})^2$$

$$4x^2 + 16x + 16 = 10x^2 + 12x$$

Esta técnica genera soluciones absurdas, por lo que resulta obligatorio comprobar las soluciones obtenidas

Ordenado, reducido y dividido entre 2: $-3x^2 + 2x + 8 = 0$

$\Delta = 4 - (-96) = 100 \Rightarrow \frac{-2 \pm 10}{-6}$ $\begin{cases} x_1 = 8/-6 = \cancel{-4/3} \text{ ABSURDA} \\ x_2 = -12/-6 = 2 \rightarrow 2 + 2 - 4 = 0 \end{cases}$