ECUACIONES 8

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas donde nosotros tendremos que buscar el conjunto de valores que pueden tomar las incógnitas para que se cumpla. Por ejemplo

$$x + 3 > 5 \longrightarrow x > 5 - 3$$

Probando valores, pronto descubrimos que si sustituimos la "x" por cualquier valor mayor que 2, tendremos garantizado que la suma será mayor que 5. La solución sería:

$$x > 2$$

Podemos usar muchas técnicas de ecuaciones.

Pero si multiplicamos o dividimos la inecuación por un valor negativo, tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad, ya que:

$8 > 4$, pero $\xrightarrow{\cdot(-1)}$ $-8 < -4$

El orden se invierte al pasar de los positivos a los negativos y viceversa

$-3 \leq 6$, pero $\xrightarrow{:(-3)}$ $1 \geq -2$

Resolvamos la inecuación: $2(x-1) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x-2}{2} > \frac{5x-3^2}{2}$

Realizamos el ABC: $2x - 2 - \frac{x-2}{6} > \frac{5x-9}{2}$

"Quitamos" denominadores: $\frac{12x}{6} - \frac{12}{6} - \frac{(x-2)}{6} > \frac{15x-27}{6}$

"–" DELANTE DE UNA FRACCIÓN

$$12x - 12 - x + 2 > 15x - 27$$

Despejamos "x": $12x - x - 15x > 12 - 2 - 27$

Y ahora, cuando dividimos entre "-4" ambos miembros para despejar "x", cambiamos el sentido de la desigualdad:

$$-4x > -17$$
$$x < -17/-4$$
$$x < 17/4$$

Podríamos comprobar que los valores menores (4, por ejemplo) cumplen la desigualdad, y que los valores mayores (5, por ejemplo) no la cumplen

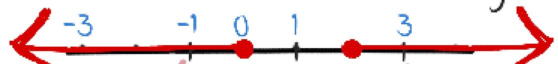
Resolvamos la siguiente inecuación: $\frac{2^{2x-1}+2}{5} \geq \frac{2^{x+1}}{4}$

¿Serías capaz de despejar x?

Cuando resulte imposible despejar la incógnita, lo primero que hacemos es resolver la ecuación (la igualdad), para después explorar los distintos tramos que no son solución

Recordad que las soluciones de la ecuación eran 0 y 2

Las soluciones cumplen la desigualdad ("...o igual"), por lo que pintamos los puntos rellenos (entran en los intervalos de la solución)



Tenemos la recta real partida en tres tramos. Probamos un representante de cada uno, para ver si cumplen la desigualdad

Si $x=-1$ tenemos: $\frac{0'125+2}{5} \geq \frac{1}{4}$; $0'425 \geq 0'25$ ✓

Si $x=1$: $\frac{2+2}{5} \geq \frac{4}{4}$; $0'8 \not\geq 1$ FALSO

Si $x=3$: $\frac{32+2}{5} \geq \frac{16}{4}$; $6'8 \geq 4$ ✓

$$\boxed{\text{La solución es } (-\infty, 0] \cup [2, \infty)}$$

Siempre podemos comprobar más valores para contrastar

Mira esta inecuación. Esa inecuación es muy parecida a esta:

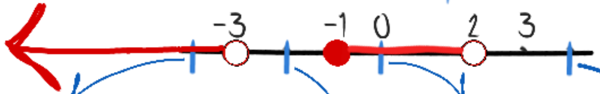
$$\boxed{\frac{x+1}{(x+3)(x-2)} \le 0}$$

Se trata de buscar cuándo son negativas esas expresiones

$$(x+1)(x+3)(x-2) \le 0$$

LAS SOLUCIONES DE SU ECUACIÓN SERÍAN -1, -3 Y 2

Y la regla de los signos es igual para el producto que para la división. La única diferencia es que -3 y 2 no son soluciones de la primera inecuación, porque no tiene sentido dividir entre 0



La solución es $(-\infty, -3) \cup [-1, 2)$

Para $x=-4$ tenemos $-3/6 < 0$ ✓

Si $x=-2$: $\cancel{-1/-4 > 0}$

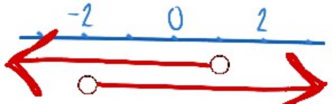
Si $x=0$: $1/-6 < 0$ ✓

Si $x=4$: $\cancel{5/14 > 0}$

Con todo lo visto, podemos afrontar sistemas de inecuaciones en una incógnita. Se trata de buscar qué con junto de números cumplen ambas

$$\left.\begin{array}{l}3x-2<1\\ -3<x-1\end{array}\right\} \xrightarrow[\cdot(-1)]{\text{DESPEJO}} \left.\begin{array}{l}x<1\\ x>-2\end{array}\right\} \quad -2<x<1$$

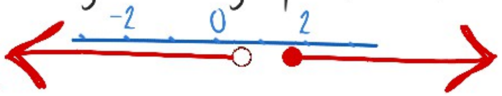
SOLUCIÓN $(-2, 1)$



Aunque no siempre encontraremos solución

$$\left.\begin{array}{l}3(x-1)\ge 2\\ 6-8x>2-x\end{array}\right\} \xrightarrow[:(-7)]{} \left.\begin{array}{l}x\ge 5/3\\ x<4/7\end{array}\right\}$$

No hay solución ya que $5/3 > 4/7$



Ni siempre podremos despejar

$$\left.\begin{array}{l}x^2-2x<8\\ 3x-2\le 1\end{array}\right\}$$

Recurrimos otra vez a resolver sus ecuaciones, y a tantear

La primera ecuación tiene las soluciones -2 y 4, pero no cumplen la desigualdad. En la segunda tenemos $x=1$, que sí la cumple

$$\boxed{\text{SOLUCIÓN } (-2, 1]}$$

-3 no cumple la primera inecuación $15>8$

0 cumple las dos $0<8$ y $-2<1$ ✓

2 no cumple la segunda: $4>1$

5 no cumple la primera: $15>8$

La siguiente inecuación esconde un sistema: $|3x-1| \le 5$

Porque implica que se cumplan simultáneamente las inecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}3x-1\le 5\\ 3x-1\ge -5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x\le 2\\ x\ge -4/3\end{array}\right\} \quad \text{Solución: } [-4/3, 2]$$

Todo lo contrario ocurre con la inecuación: $|2x-7| > 9$

Aquí nos valdrá tanto las soluciones de la inecuación $2x-7>9$ como las soluciones de la inecuación $2x-7<-9$ (ya que $|-10|>9$)

En este caso, las soluciones de las inecuaciones se unen, no como en los sistemas, que nos quedamos con la intersección

$$\left.\begin{array}{l}2x-7>9\ ;\ 2x>16\ ;\ x>8\\ 2x-7<-9\ ;\ 2x<-2\ ;\ x<-1\end{array}\right\} \longrightarrow \text{Solución: } (-\infty, -1) \cup (8, \infty)$$

La compañía A me ofrece una tarifa para el móvil de 10€ fijos, más 15 céntimos por establecimiento de llamada. La compañía B me pide 5€ de fijo, más 20 céntimos por llamada. ¿Cuántas llamadas debo realizar al mes para que me convenga la primera compañía?

Creamos dos funciones para poder comparar las tarifas

Sea "x" el número de llamadas que realizo

La compañía A me cobra: $a(x) = 10 + 0'15x$

La compañía B me cobra: $b(x) = 5 + 0'20x$

Quiero descubrir cuándo ocurre que $b(x) > a(x)$, es decir, busco la solución de la ecuación: $5 + 0'20x > 10 + 0'15x$

$$0'20x - 0'15x > 10-5\ ;\ 0'05x > 5\ ;\ 5x > 500\ ;\ x > 100$$

Si realizo más de 100 llamadas, me interesa la compañía A