

FUNCIONES 4

Vamos a representar la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Si le damos los valores habituales, nos encontramos un problema para $x=1$, ya que obtenemos $1/0$, y ya debemos saber que carece de sentido que dividamos entre cero. Veamos qué pasa cuando nos acercamos a $x=1$ tanto por la izquierda como por la derecha

Vamos a hallar la imagen de $0.9, 0.99, 0.999 \dots$, acercándonos a 1 por la izquierda (con valores ligeramente menores)

$$f(0.9) = 1/(0.9 - 1) = 1/(-0.1) = -10/1 = -10$$

$$f(0.99) = 1/(-0.01) = -100$$

$$f(0.999) = -1000$$

Cuanto más nos acercamos, vamos obteniendo imágenes más grandes y negativas

... Decimos que el LÍMITE DE $f(x)$ CUANDO x TIENDE A 1 POR LA IZQUIERDA es $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Por la derecha tenemos

$$f(1.1) = 1/(1.1 - 1) = 1/0.1 = 10$$

$$f(1.01) = 1/0.01 = 100$$

$$f(1.001) = 1000$$

Podemos conseguir imágenes tan grandes y positivas como queramos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

(límite por la derecha)

Como ya sabemos cómo se comporta la función por la derecha y por la izquierda de 1, podemos pasar a hallar las imágenes de los valores que hay alrededor de 1:

Con esas imágenes, y sabiendo cómo se comporta la función alrededor de $x=1$, tenemos información de sobra para hacer una representación fiable

$$f(-2) = 1/(-2-1) = -1/3$$

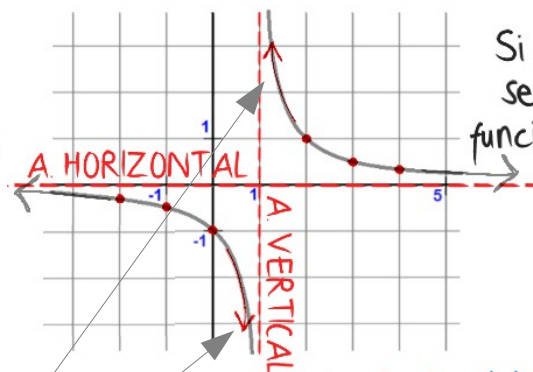
$$f(-1) = 1/(-1-1) = -1/2$$

$$f(0) = 1/(0-1) = -1$$

$$f(2) = 1/(2-1) = 1$$

$$f(3) = 1/(3-1) = 1/2$$

$$f(4) = 1/(4-1) = 1/3$$



Si observamos la gráfica, también se aprecia cierta tendencia en la función al aumentar los valores de " x "

$$f(10) = 1/(10-1) = 1/9 = 0.1111\dots$$

$$f(100) = 1/99 = 0.01010101\dots$$

$$f(1000) = 1/999 = 0.001001\dots$$

Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Y cuando tiende a menos infinito

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(-10) = -0.0909\dots$$

$$f(-100) = -0.009009\dots$$

$$f(-1000) = -0.00090009\dots$$

Las dos rectas intermitentes rojas son las ASÍNTOTAS de nuestra función: su curva se acerca interminablemente a esas rectas sin llegar a tocarlas

Tenemos una asíntota horizontal y otra vertical

1

La función que hemos visto es una traslación de la FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA: $f(x) = k/x$ (k =constante de prop. inversa)

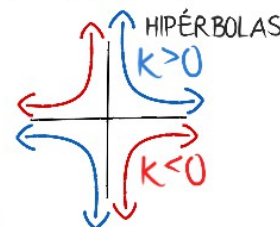
Por ejemplo, la función que refleja el reparto de 12 tartas en función del número " x " de personas que vengán al mismo $f(x) = 12/x$

Todas las funciones de proporcionalidad inversa tienen la siguiente forma si $k > 0$, o al revés si $k < 0$:

Son funciones impares, y los ejes de coordenadas son sus asíntotas

Todas las funciones de la forma:

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ son traslaciones de las funciones de proporcionalidad inversa. Sus asíntotas son: $\begin{cases} x = -d/c \text{ (vertical)} \\ y = a/c \text{ (horizontal)} \end{cases}$



Representemos la función: $f(x) = \frac{3x-2}{1-4x} = \frac{3x-2}{-4x+1}$

Primero debemos buscar aquellos valores que anulen el denominador, ya que no tendrán imagen (no formarán parte del dominio)

$$-4x+1=0 \quad ; \quad -4x=-1 \quad ; \quad x=-1/-4=1/4=0'25$$

Si me acerco a $1/4$ por la izquierda, tengo

$$f(0'2)= -7, \quad f(0'24)= -32, \quad f(0'249)= -313'25 \dots \quad \lim_{x \rightarrow 1/4^-} f(x) = -\infty$$

Por la derecha: $f(0'26)= 30'5, \quad f(0'251)= 311'75 \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 1/4^+} f(x) = \infty$$

Explorando cuando tiende al más/menos infinito

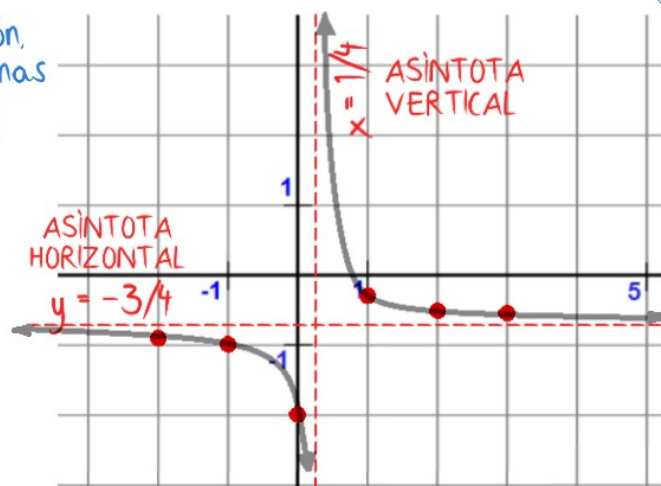
$$f(100)= -0'7468\dots, \quad f(10000)= -0'74996\dots \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -0'75 = -3/4$$

$$f(-100)= -0'7531\dots, \quad f(-10000)= -0'75003\dots \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0'75 = -3/4$$

Con toda esta información, bastará con obtener algunas imágenes a izquierda y derecha de $1/4$

$$\begin{aligned} f(-2) &= -8/9 \\ f(-1) &= -5/5 = -1 \\ f(0) &= -2/1 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1/-3 = -1/3 \\ f(2) &= -4/7 \\ f(3) &= -7/11 \end{aligned}$$



2

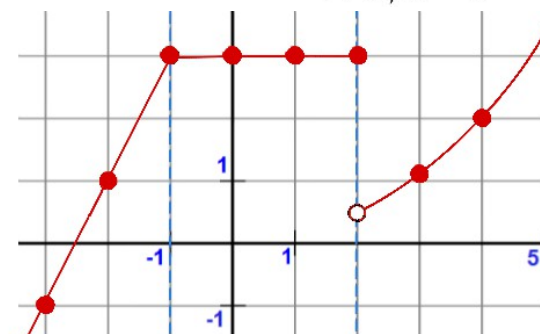
Gracias a los límites, podremos estudiar formalmente la continuidad de una función. Para verlo, vamos a utilizar una función DEFINIDA A TROZOS, una función que vendrá definida por una fórmula distinta en cada tramo del dominio

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x < -1 \quad \text{PRIMER TRAMO O TROZO} \\ 3 & -1 \leq x \leq 2 \quad \text{SEGUNDO TRAMO} \\ x^2/8 & x > 2 \quad \text{TERCER TRAMO} \end{cases}$$

Usaremos una tabla para hallar las imágenes de cada tramo

x	$2x+5$	x	3	x	$x^2/8$
-3	$-6+5 = -1$	-1	3	2	$4/8 = 0'5$
-2	$-4+5 = 1$	0	3	3	$9/8 = 1'125$
-1	$-2+5 = 3$	2	3	4	$16/8 = 2$

Representemos la función, haciendo uso de los puntos huecos y rellenos en los extremos de cada tramo, dependiendo de si la igualdad es válida o no



Podemos asegurar formalmente que la función es continua en $x=-1$ ya que $f(x)$ TIENE LÍMITE cuando x tiende a -1 , y coincide con la imagen de -1 . SUS LÍMITES LATERALES SON IGUALES

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Sin embargo, en $x=2$ no hay continuidad ya que el límite NO EXISTE, al no coincidir los límites laterales $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \neq 1/2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Las funciones definidas a trozos son muy usadas en la vida cotidiana, por ejemplo, cada vez que nos realizan una oferta si llegamos a comprar "x" cantidad.

Detrás de la declaración de la renta, de algunos parking, del consumo del agua, de la factura del móvil... tenemos más funciones definidas a trozos

Por si no lo sabías

N: Es el conjunto de los números naturales
1, 2, 3, 4, 5, 6... (necesarios para contar y ordenar)

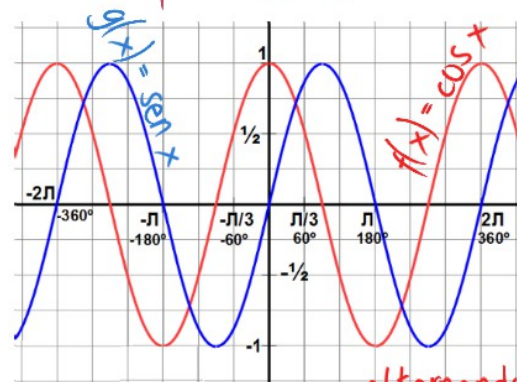
Z: Es el conjunto de los números enteros
... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ... (sin decimales)

Q: Es el conjunto de los números racionales,
donde entran todos los cocientes entre números enteros
(fracciones y decimales periódicos)

R: Es el conjunto de los números reales,
donde entran todos los anteriores y los irracionales
(raíces no exactas, pi, e...)

Esa tipografía se llama "negrita de pizarra"

Sigamos intentando descubrir las fórmulas de las funciones. Veamos unas cuantas que no son polinómicas



Las funciones SENOIDALES son periódicas ($T=360^\circ=2\pi$)

La función seno es impar, y la función coseno es par

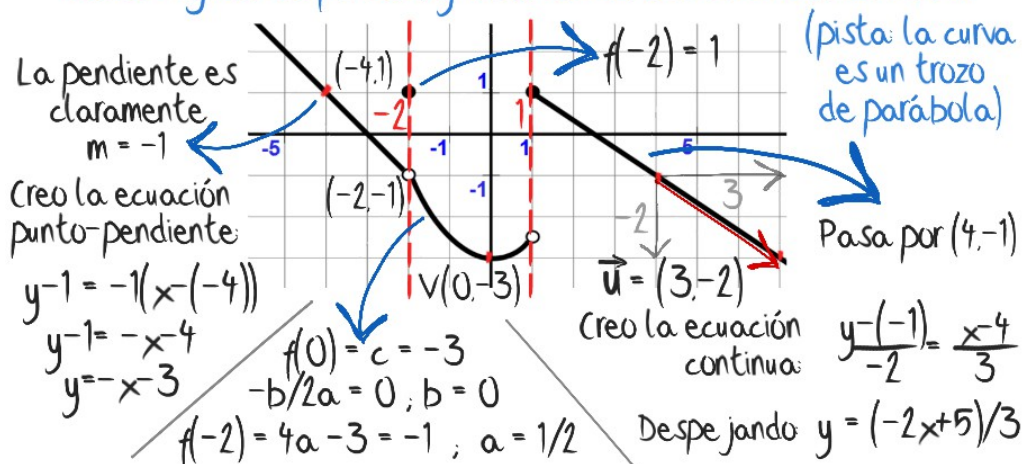
El dominio de ambas es $\mathbb{R}$

El recorrido de ambas es $[-1, 1]$

Son continuas en todo su dominio, alternando tramos crecientes y decrecientes

No te puedes ni imaginar lo presentes que están en nuestras vidas

Veamos si somos capaces de descubrir la expresión algebraica de la siguiente función, y además analizar su continuidad



$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & x < -2 \\ 1 & x = -2 \\ x^2/2 - 3 & -2 < x < 1 \\ (-2x+5)/3 & x \geq 1 \end{cases}$$

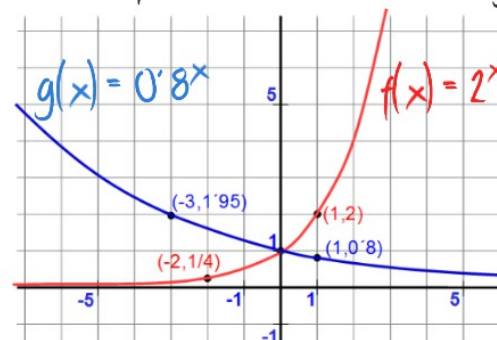
Existe el límite cuando $f(x)$ tiende a -2, pero no coincide con $f(-2)$, por lo que no es continua en $x = -2$. Tampoco lo es en $x = 1$ ya que en este caso ni existe el límite

3

Las funciones EXPONENCIALES no cortan al e je de abscisas
El dominio es $\mathbb{R}$. El recorrido es $(0, \infty)$ (todos los números reales mayores que 0)

Siempre cortan al e je de ordenadas en $(0, 1)$ ($a^0 = 1$)

Siempre son continuas, con $y=0$ como asíntota horizontal



Si la base es mayor que 1, son crecientes, pero si está entre 0 y 1, son decrecientes

ii Algunos dicen que el calentamiento del planeta es exponencial !!

Las funciones LOGARÍTMICAS no cortan al eje de ordenadas

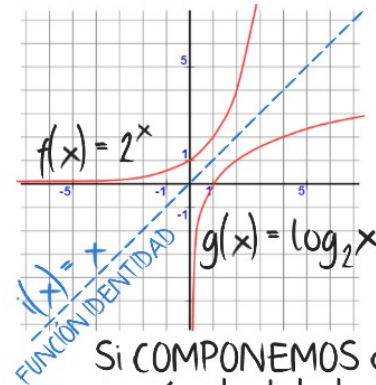
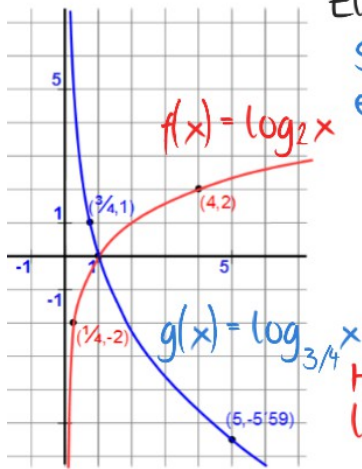
El dominio es $(0, \infty)$ y el recorrido es $\mathbb{R}$

Siempre cortan al eje de abscisas en el punto $(1, 0)$ ($\log_a 1 = 0$)

Siempre son continuas, con $x=0$ como asíntota vertical

Si la base es mayor que 1, siempre son crecientes, pero si está entre 0 y 1, son decrecientes

Hay una función logarítmica que determina la antigüedad de cualquier resto orgánico, gracias a la prueba del carbono 14



¿Te acuerdas de estas funciones?
¿No te resulta curiosa la simetría?

Eso ocurre porque son funciones RECÍPROCAS o INVERSAS ya que para todo "a" y "b" que $f(a) = b$, tendremos que $g(b) = a$

Por ejemplo $f(3) = 8$ y $g(8) = \log_2 8 = 3$

Si COMPONEMOS dos funciones recíprocas obtenemos la función identidad: $g(f(x)) = \log_2 f(x) = \log_2 2^x = x \log_2 2 = x = i(x)$

Podemos expresarlo de la siguiente forma: $f(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = f^{-1}(x)$

¿Recuerdas más funciones que sean recíprocas?

$$a(x) = kx \xleftrightarrow{\text{RECÍPROCAS}} b(x) = x/k$$

$$c(x) = x + k \xleftrightarrow{\quad} d(x) = x - k$$

$$e(x) = y = mx + n \xleftrightarrow{\quad} f(x) = (x - n)/m$$

$$\text{Si } e(x) = 3x - 5, \quad e(13) = 39 - 5 = 34 \xleftrightarrow{\quad} f(x) = (x+5)/3, \quad f(34) = (34+5)/3 = 13$$

$$g(x) = x^n \xleftrightarrow{\quad} h(x) = \sqrt[n]{x} \quad (\text{si } n \text{ es par, solo con dominio positivo})$$

Expresando cualquier función con una única variable como una ecuación ($y = \dots$), basta despejar la "x", y después intercambiarla con la "y", para hallar su función recíproca

$$\text{Halla la función recíproca de } t(x) = \frac{3}{2x-1} = y \Rightarrow \frac{3}{y} = 2x-1$$

$$2x = \frac{3}{y} + 1 = \frac{(3+y)}{y}; \quad y = \frac{(3+x)}{2x} \quad \text{Y ya tenemos } s(x) = \frac{3+x}{2x}$$

$$t(2) = 3/3 = 1; \quad s(1) = 4/2 = 2 \quad \text{Compruébalo con más valores si quieres}$$