CAPÍTULO I. PROBABILIDAD CONDICIONADA
Formulario de Probabilidad

1. Reglas Fundamentales

- **Suceso Contrario:** $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- <u>**OJO, REGLA DE ORO:**</u> SIEMPRE QUE AFRONTEMOS UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD, DEBEMOS PENSAR SI ES MEJOR HACERLO DE FORMA DIRECTA O "ATACAR" POR EL CONTRARIO (puede facilitarnos mucho el problema). Incluso a veces descubrimos que es tan probable que ocurra como que no ocurra, por lo que estamos ante un 50% de probabilidad
- **Regla de Laplace:** P(A) = Casos Posibles / Casos Favorables
- **Unión (Regla de la Suma):** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ o como me gusta más a mí:

  $$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

- **Solo si los sucesos independientes (que ocurra uno no influye en que ocurra el otro):**

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

  Si se cumple esta fórmula, queda demostrada la independencia de los sucesos

---

2. Leyes de De Morgan

Son las reglas para gestionar la negación de grupos:

1. **Negación de la Unión:** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - *Significa:* "Que no ocurra ni A ni B".
2. **Negación de la Intersección:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   - *Significa:* "Que no ocurran ambos a la vez".

---

3. Probabilidad Condicionada

- **Fórmula General:** $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$
- **Intersección (Sucesos Dependientes):** $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$
- **Si son independientes**, $P(A/B) = P(A)$, porque B no influye en que ocurra A y volvemos a:

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

---

4. Diferencia y Casos Especiales

- **Solo A (A pero no B):** $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$, ya que está claro que $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ "parten" A en dos, por lo que $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$
- **Probabilidad de la Unión si son Incompatibles:** $P(A \cup B)=P(A) + P(B)$ ya que si son incompatibles no pueden ocurrir a la vez y $P(A \cap B) = \emptyset$ (conjunto vacío)

1. PROBABILIDAD

1.1. Álgebra de sucesos. Experimentos simples y compuestos

Experimento aleatorio

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Ejemplos:

- *Son experimentos aleatorios:*

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.
b) Lanzar dos dados y anotar los números de las caras superiores.
c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.
d) Sacar, sin reemplazamiento, dos cartas de la baraja.
e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

- *No son experimentos aleatorios*

a) Salir a la calle sin paraguas cuando llueve y ver si te mojas.
b) El precio de medio kilo de rosquillas, si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.
c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las provincias españolas.
b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Suceso, suceso elemental, espacio muestral

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral, E**.

Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral.

Ejemplos:

- *Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga* cara *o salga* cruz. *El conjunto de sucesos elementales es E = {cara, cruz}.*

- *Al lanzar un dado, el conjunto de posibles resultados es E =* {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso obtener par es {2, 4, 6}, el suceso obtener impar es {1, 3, 5}, el suceso obtener múltiplo de 3 es {3, 6}, sacar un número menor que 3 es {1, 2}.

El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes, son:

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es E = {*blanca*, *negra*}.

b) Sacar una carta de una baraja española es E = {As de Oros, 2O, 3O,…, SO, CO, RO, As de Copas, …, RC, As de Bastos, …, RB, As de Espadas,…, RE}

Al lanzar dos monedas el conjunto de posibles resultados es $E = \{(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)\}$. El suceso *sacar cero caras* es $\{(+, +)\}$, *sacar una cara* es $\{(C, +), (+, C)\}$ y *sacar dos caras* $\{(C, C)\}$.

Actividades propuestas

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: $A \cup B$ se verifica si se verifica A **o bien** se verifica B.

La **intersección**: $A \cap B$ se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

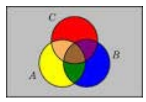
La **diferencia**: $A - B$ se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios.

Las operaciones con sucesos verifican las mismas **propiedades** que las operaciones con conjuntos:

Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Simplificativa:	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Todas ellas puedes comprenderlas representando conjuntos usando diagramas de Venn.



Ejemplos:

Al lanzar un dado, llamamos A *al suceso obtener par*: $A = \{2, 4, 6\}$, y B al suceso obtener múltiplo de 3: $B = \{3, 6\}$. Entonces $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A - B = \{2, 4\}$.

Actividades propuestas

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Suceso seguro, suceso imposible y suceso contrario

Se considera que el espacio muestral, E, es un suceso al que se denomina **suceso seguro**, y que el conjunto vacío, $\varnothing$, es otro suceso, al que se llama **suceso imposible**.

Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o **complementario**) de A, y se escribe $\overline{A}$, (o A', o A^C, o no$A$), al suceso $E - A$.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

Ejemplos:

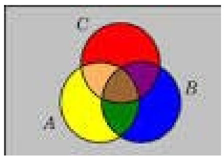
- *Al lanzar un dado, si* $A = \{2, 4, 6\}$, y $B = \{3, 6\}$. Los sucesos A y B son compatibles pues $A \cap B = \{6\}$. Sucesos incompatibles son "sacar un número menor que 2" y "sacar múltiplo de 3" pues es imposible que se verifiquen a la vez.

Actividades propuestas

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".



11. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

12. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas?

B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?

C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman café. d) Toman té y no toman café.

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.

F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

13. En el mismo lugar del problema anterior, con 35 personas, ahora se ha añadido a la máquina de bebidas el chocolate (C), y ahora se sabe que 12 personas toman sólo té, que 5 personas toman té y chocolate pero no café, que 20 personas no toman ni té ni chocolate. Es posible saber cuántas personas tomaban al menos una de las tres bebidas; cuántas, de entre las que tomaban café, tomaban también chocolate… Investiga si tienes datos suficientes para conocerlo todo, o debes ampliar la encuesta para conocer datos nuevos.

1.2. Asignación de probabilidades

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya había sido usado este concepto, por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles,** que se conoce como **Regla de *Laplace*** y dice que:

Regla de Laplace

"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles".

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables al suceso } A}{\textit{número de casos posibles}}$$

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ley de los Grandes Números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la *Ley de los Grandes Números*, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Actividades resueltas

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, y suponemos que la moneda no está trucada. Si sospecháramos que la moneda estuviera trucada para asignar esa probabilidad habría que tirar la moneda un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener cara.
- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 5, y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0.5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0.49.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar un oro*", o "*sacar un as*", o "*sacar el caballo de copas*"… Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad de, por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar un oro* es 10/40, y la de un *as* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar el rey de copas? ¿Y de sacar un rey? ¿Y una copa?

La probabilidad de sacar el *rey de copas* es 1/40. Pero el suceso *sacar un rey* se cumple si sale el rey de oros, o de copas, o de bastos o de espadas. Es decir, no es un suceso simple, está formado, en este caso, por 4 sucesos elementales, luego su probabilidad es 4/40 = 1/10. Lo mismo le ocurre a *sacar una copa*. Es un suceso compuesto, y como hay 10 copas su probabilidad es 10/40 = 1/4.

- *En una clase hay* 15 *chicos y* 14 *chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?*

Como hay 14 chicas (los casos favorables) sobre una población de 29 individuos, de acuerdo con la Ley de *Laplace*, la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{14}{29}$$

- *En el monedero tenemos* 3 *monedas de* 1 *céntimo,* 7 *monedas de* 5 *céntimos,* 4 *monedas de* 10 *céntimos y* 2 *monedas de* 50 *céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?*

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 céntimos o de 50 céntimos. Por tanto el total de casos favorables es de 6 (hay 4 de 10 y 2 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 3 + 7 + 4 + 2 = 16.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es:

$$P(\text{par de céntimos}) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso "par de céntimos"}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Actividades propuestas

14. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

15. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

1.3. Definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov*

El matemático ruso *Andrey Kolmogorov* (1903, 1987) basándose en las propiedades del álgebra de sucesos y en las propiedades de las frecuencias relativas dio una definición de probabilidad basada en un sistema de axiomas.

La definición axiomática de *Kolmogorov* es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

Definición

La probabilidad es una aplicación (función) que asigna a cada suceso A de un espacio muestral E un número real que debe verificar las siguientes propiedades:

$$E \to R$$

$$A \to P(A)$$

1.- La probabilidad del suceso seguro es 1:

$$P(E) = 1.$$

2.- La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo:

$$P(A) \geq 0, \text{ para todo } A.$$

3.- Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

Consecuencias de los axiomas

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Demostración:

En efecto, un suceso y su suceso contrario son incompatibles, y su unión es el suceso seguro. Por lo que usando los axiomas 1 y 3 se tiene:

$$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

b) La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\emptyset) = 0$.

Demostración:

En efecto, el suceso imposible es el suceso contrario del suceso seguro, por lo utilizando la propiedad anterior y el axioma 1, se tiene:

$$P(\emptyset) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

c) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Demostración:

En efecto, los sucesos elementales son incompatibles entre sí, luego si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ por el axioma 3 se tiene que:

$$P(A) = P\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n).$$

Si los sucesos elementales son equiprobables de esta propiedad se deduce la regla de *Laplace*.

d) La probabilidad de la unión de sucesos disjuntos dos a dos es igual a la suma de las probabilidades: $P\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Demostración:

Son sucesos incompatibles entre sí, luego se verifica por el axioma 3

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de* 40 *cartas? ¿Y de* ***no*** *sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de* ***no*** *sacar una copa?*

El suceso *no sacar un as* es el suceso **contrario** al de *sacar un as*. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Observa que se obtiene que P(as) + P(no as) = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

La probabilidad de *sacar copa* es 10/40, y hay 30 cartas que no son copas, luego la probabilidad de ***no*** *sacar copa* es 30/40, y 10/40 + 30/40 = 1.

Actividades propuestas

16. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

17. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar una copa o un oro?

Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar un as o un oro?

Hay 4 ases y hay 10 oros, pero hay el *as de oros*, luego las cartas que son o bien un as o bien un oro son 13, luego la probabilidad es 13/40.

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que, como copa y oro, no pueden realizarse a la vez, que su intersección es el suceso imposible, y **sucesos compatibles** a los que, como as y oro, pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso "*se verifica A o bien se verifica B*". Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades, pues se verifica el axioma 3 de *Kolmogorov*.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B tienen una intersección no vacía, pueden verificarse a la vez, habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar un rey o una figura; b) No sale un rey o sale un rey; c) Sacar un basto o una figura.*

a) Hay 4 reyes y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero los cuatro reyes son figuras, por tanto $P(\text{Rey} \cup \text{Figura}) = 4/40 + 16/40 - 4/40 = 16/40 = 0.4$.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes, y hay 4 reyes, luego $P(\text{no rey} \cup \text{rey}) = 36/40 + 4/40 = 1$. Esta conclusión es más general. Siempre:

$$P(\overline{A} \cup A) = 1,$$

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

c) Hay 10 bastos y hay 16 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez bastos (as, sota, caballo y rey), luego $P(\text{Basto} \cup \text{Figura}) = 10/40 + 16/40 - 4/40 = 22/40 = 11/20$.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

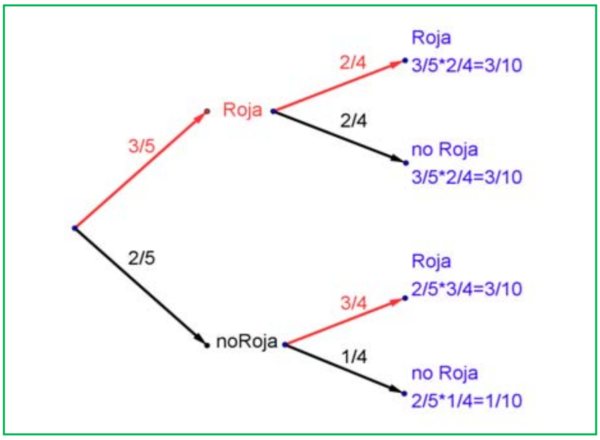
En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

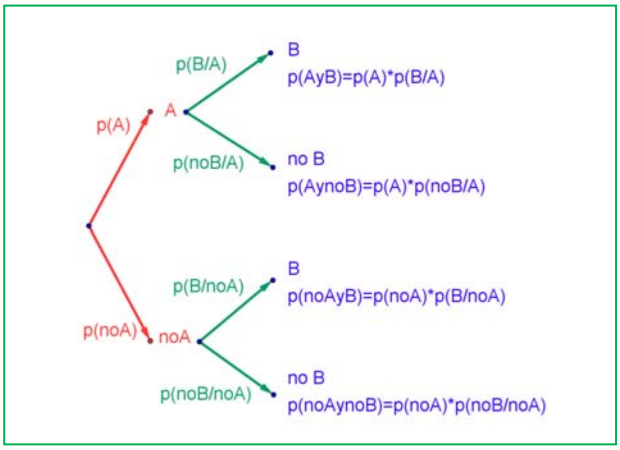
Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 3/5, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**.

Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4, y está condicionada por lo que antes hayamos sacado. Se escribe: $P(\text{Roja/Roja})$ y se lee *"probabilidad de Roja condicionado a haber sacado Roja"*. La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 2/5 · 3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5 · 1/4 = 2/20 = 1/10.





Pero observa más cosas. Por ejemplo, sumando las probabilidades de *Roja* y *noRoja* se obtiene: 3/5 + 2/5 = 1; y lo mismo en las otras ramas del árbol: 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; e incluso sumando todas las probabilidades finales: 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.

Los sucesos son dependientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.

Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de* 40 *cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 4/40 · 4/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *as* viene condicionada por que hayamos sacado un as previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 4 ases sino sólo 3, luego la probabilidad es:

$$4/40 \cdot 3/39 = 1/130.$$

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $P(B/A) \neq P(B)$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)$.

Por tanto la expresión: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ **es general, ya que si los sucesos son independientes entonces** $P(B/A) = P(B)$ **y por tanto** $P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$.

Resumen:		
Suceso contrario:	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$	
Intersección:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	**Si A y B son independientes** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Unión:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	**Si A y B son incompatibles** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Actividades propuestas

18. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y B = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

19. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

20. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

21. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A)$ = 5/36 (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B)$ = 8/36 (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:

(a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. (b) La probabilidad de que no ocurra B. (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. (d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B. (a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B? (b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B?

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)$ = 1/3, $P(B)$ =1/5 y $P(AUB)$ = 7/15, hallar: (a) La probabilidad de que se verifique A y B. (b) La probabilidad de que se verifique A y no B. (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. (d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B. Selectividad. Septiembre 97.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$ Calcular:

$P(A\cup B), P(A\cap B), P(\overline{A}/B), P(\overline{B}/A)$.

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{4}$, $P(A \text{ U } B) = \frac{1}{2}$. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. *Nota.* $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

SOLUCIONES:

1. a) NO   b) SI   c) NO   d) SI   e) NO

2. Suceso A {salir a}, suceso B {salir e}, suceso C {salir i}, suceso D {salir o} y suceso E {salir u}
Espacio muestral {A, B, C, D, E}

3. Suceso A {caer de punta}, suceso B {no caer de punta}   Espacio muestral {A, B}

4. Suceso A {salir cara y salir cruz}, suceso B {salir cara y salir cara}

5. (Solución abierta)
Sabiendo que la cifra de las unidades (espacio muestral) es: E={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
1)El suceso obtener un número par {0, 2, 4, 6, 8}
2)El suceso obtener un múltiplo de 3 {0, 3, 6, 9}

6. (Solución abierta)
Sacar una carta de una baraja española es
$E = \{As\ de\ Oros, 2O, 3O, \ldots, SO, CO, RO, As\ de\ Copas, \ldots, RC, As\ de\ Espadas, \ldots, RE, As\ de\ Bastos, \ldots, RB\}$
1)El suceso sacar una carta de copas $\{As\ de\ Copas, 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, SC, CC, RC\}$
2)El suceso sacar un rey $\{RC, RO, RB, RE\}$
3)El suceso sacar una carta par $\{2C, 4C, 6C, SC, RC, 2B, 4B, 6B, SB, RB, 2E, 4E, 6E, SE, RE, 2O, 4O, 6O, SO, RO\}$

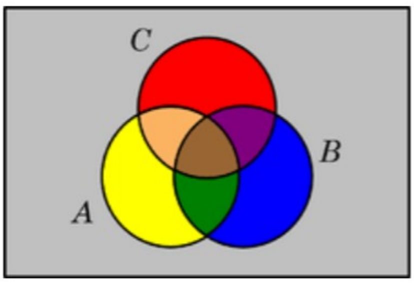
7. $B = \{As\ de\ Oros, As\ de\ Bastos, As\ de\ Copas, As\ de\ Espadas\}$
$A = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE\}$
$A \cup B = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE, As\ de\ Oros, As\ de\ Bastos, As\ de\ Copas, As\ de\ Espadas\}$
$A \cap B = \varnothing$; $son\ sucesos\ incompatibles$
$A - B = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE\}$

8. A= {5, 6}
Por tanto, el suceso contrario es que se saquen números menores o igual a 4, luego: $\bar{A}$ = {1, 2, 3, 4}

9. A y $\bar{A}$ son sucesos incompatibles. No puede ocurrir a la vez un suceso y su contrario

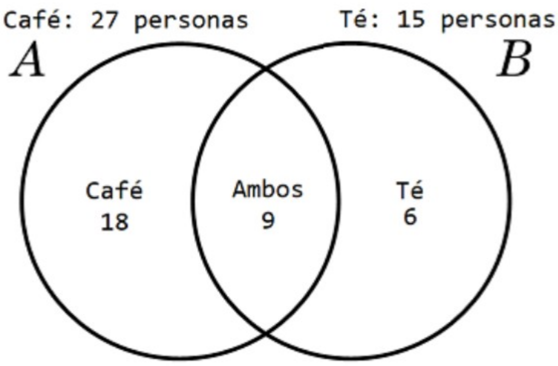
10. Suceso sacar un as = A   Suceso no sacar un as = $\bar{A}$
Suceso sacar un 6 = B   Suceso sacar un rey = C

11.



AUBUC sería la unión de todos los conjuntos de colores (solución discrepante: ver solucionario)

12.



a) 9 b) 18 y 6

c) Toman té: A : 15 Toman café: B : 27

a) Toman café y té: A ∩ B : 9 b) No toman ni café ni té: $\bar{A} \cap \bar{B}$ = 2

c) Toman té o bien toman café: A ∪ B: 18 + 9 + 6 = 33 (discrepo, interpreto distinto)

d) Toman té y no toman café: toman únicamente té $A \cap \bar{B}$ = 6

d) Toman café 27, únicamente café 18, toman café y también té 9 personas; A/B = 9

e) Toman únicamente té: $A \cap \bar{B}$ = 6 No toman nada: $\bar{A} \cap \bar{B}$ = 2 No toman café: $\bar{B}$ = 8

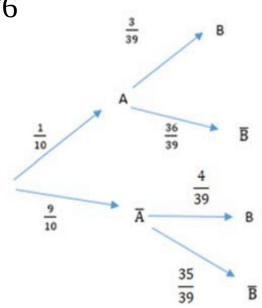
f) En total 33 personas toman una de las dos bebidas frente a las 2 personas que no toman ninguna de las dos, que suman las 35 personas.

13. Hay un error en la encuesta 14. ¼ 15. En la de frecuencias relativas

16. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 5 al tirar un dado?
Suponiendo un dado de 6 caras: Como hay 5 números que no son cinco 5/6
¿Y de no sacar un múltiplo de 3?
Los múltiplos de 3, del 1 al 6 son 3 y 6, y como se trata de no sacar estos, 2/3
¿Y de no sacar un número menor que 2?
Menor que 2 solo está el 1, 5/6

17. ¾

18.



$P(B/\bar{A}) = \frac{4}{39}$; $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{35}{39}$; $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{36}{39} + \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{39} = \frac{12}{65}$

19. 129/130 y 21/26 20. 1/1000 y 1/2470 21. 1/36 22. 11/36

23. a) CIERTO b) 1/6 1/12 25/36 c) ¼ 3/28 ¾

24. a) 19/24 b) ¼ c) 5/24 d) 5/6 25. a) 8 b) 1/7

26. a) 1/15 b) 4/15 c) 8/15 d) ⅔ 27. a) 9/20 b) 3/10 c) 2/5 d) 3/5

28. a) 1/12 b) ¼ c) ¾ d) 2/3