CAPÍTULO II.

DIAGRAMAS DE ÁRBOL
Y TABLAS DE CONTINGENCIA

Vamos a soltarnos con dos herramientas fundamentales

para analizar todos los casos posibles de un experimento.

Aprenderemos también a relacionarlas entre sí,
y cómo se pasa de una a la otra con sencillos razonamientos.

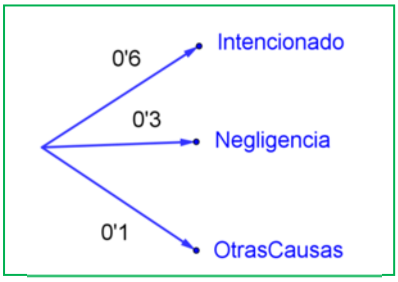
Su buen manejo hace prescindible todo el “formulerío”
que rodea a la probabilidad condicionada

1.4. Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Diagramas de árbol

Ejemplo:

- *Se hace un estudio sobre los incendios y se comprueba que en una determinada zona el* 60 % de los incendios son intencionados, un 30 % se deben a negligencias y 10 % a causas naturales como rayos o a otras causas. Representa esta situación con un diagrama de árbol.



Actividades resueltas

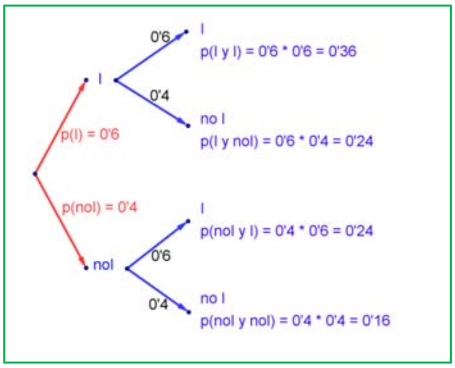
- *Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es* 0.6, *¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?*

Llamamos I al suceso "ser intencionado" y $\bar{I}$ = no$I$ al suceso "no ser intencionado". Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:

$$P(I \cap I) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36$$

$$P(I \cap \bar{I}) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$$

ya que es la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo no.



$$P(\bar{I} \cap I) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$$

$$P(\bar{I} \cap \bar{I}) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$$

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de: $(I \cap I)$, $(I \cap \bar{I})$ y $(\bar{I} \cap I)$ que es 0.36 + 0.24 + 0.24 = 0.84. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario:

$P(\text{no}I \cap \text{no}I) = P(\bar{I} \cap \bar{I}) = 0.16$ y restarla de 1:

P(al menos uno intencionado) = 1 – 0.16 = 0.84.

Actividades propuestas

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0.6$.

30. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.96$; $P(B) = 0.98$ y $P(C) = 0.99$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

31. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0.3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totales**
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totales	474	26	500

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totales**
Lesión maligna (M)	0.412	0.024	0.436
Lesión benigna (B)	0.536	0.028	0.564
Totales	0.948	0.052	1

Actividades resueltas

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.*

  0.412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

  0.024 = $P(M \cap I)$; 0.536 = $P(B \cap C)$; 0.028 = $P(B \cap I)$.

  ¿Y 0.436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0.436 = $P(M)$.

  Del mismo modo: 0.564 = $P(B)$; 0.948 = $P(C)$; 0.052 = $P(I)$.

  Observa que $P(M) + P(B) = 1$ y que $P(C) + P(I) = 1$. Son sucesos contrarios.

- *¿Son dependientes o independientes los sucesos M y C?*

Solución:

$P(M \cap C) = P(M) \cdot P(C/M)$, por tanto: $0.412 = 0.436 \cdot P(C/M)$, de donde $P(C/M) = 0.412/0.436 = 0.945$ que es distinto de 0.948 que es la probabilidad de C. Se puede afirmar que M y C son dependientes ya que $P(C/M) \neq P(C)$. Pero si redondeamos a dos cifras decimales $P(C/M) = 0.95 = P(C)$, y en este caso consideramos que son sucesos independientes.

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
No B = $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ y } P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Probabilidad CONDICIONADA y DIAGRAMA en ÁRBOL PROBABILIDAD desde CERO. Susi Profe

https://www.youtube.com/watch?v=Aj2xJuDTyO4

Actividades propuestas

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0.27		0.56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0.58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap \mathrm{U})$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividades resueltas

- *Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y no$A$ = $\overline{A}$.*

	A	No A = $\overline{A}$	
B	2/9	5/9	7/9
No B = $\overline{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Conocemos la $P(A)$ = 3/9 = 1/3, $P(\overline{A})$ = 6/9 = 2/3, $P(B)$ = 7/9 y $P(\overline{B})$ = 2/9.

También conocemos $P(A \cap B)$ = 2/9; $P(A \cap \overline{B})$ =1/9; $P(\overline{A} \cap B)$ = 5/9 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 1/9.

Nos falta conocer $P(B/A)$ que podemos obtener dividiendo $P(A \cap B)$ entre $P(A)$:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.$$

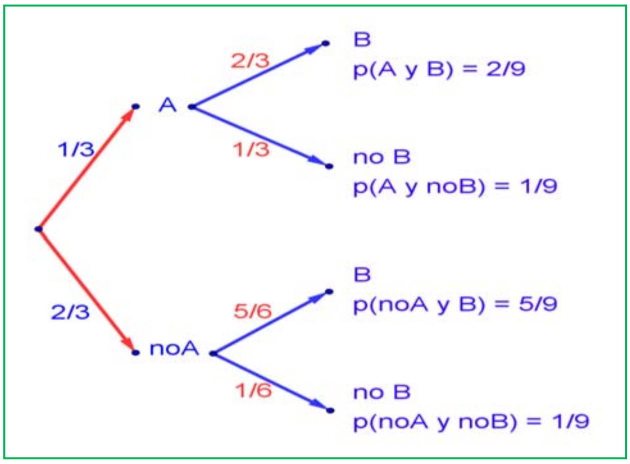
Del mismo modo calculamos:

$$P(\overline{B}/A) = P(A \cap \overline{B})/P(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3$$

$$P(B/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(\overline{A}) = 5/9 : 6/9 = 5/6$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{A}) = 1/9 : 6/9 = 1/6.$$

El árbol es:



Actividades resueltas

- *Recíprocamente, dado el diagrama de árbol obtener la tabla de contingencia:*

Ahora conocemos $P(A)$ = 0.3 y $P(\overline{A})$ = 0.7. Además conocemos $P(B/A)$ = 1/3; $P(B/\overline{A})$ = 6/7; $P(\overline{B}/A)$ = 2/3 y $P(\overline{B}/\overline{A})$ = 1/7.

Calculamos, multiplicando: $P(A \cap B)$ = 0.3·(1/3) = 0.1; $P(A \cap \overline{B})$ = 0.3·(2/3) = 0.2; $P(\overline{A} \cap B)$ = 0.7·(6/7) = 0.6 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0.7·(1/7) = 0.1 que ponemos también en el árbol.

Rellenamos con estos datos una tabla de contingencia:

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	0.1	0.6	
No B = $\overline{B}$	0.2	0.1	
	0.3	0.7	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan, $P(B)$ = 0.1 + 0.6 = 0.7 y $P(\overline{B})$ = 0.2 + 0.1 = 0.3.

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	0.1	0.6	0.7
No B = $\overline{B}$	0.2	0.1	0.3
	0.3	0.7	1

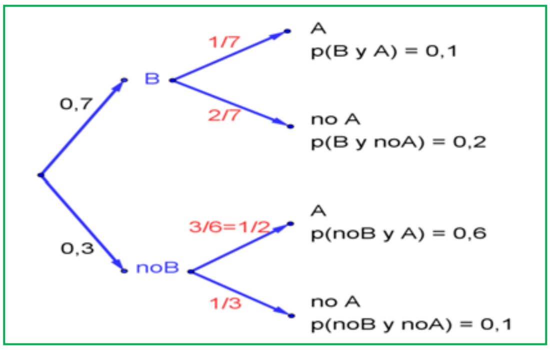
Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer:

$P(A/B)$ = 0.1/0.7 = 1/7;

$P(\overline{A}/B)$ = 0.2/0.7 = 2/7;

$P(A/\overline{B})$ = 0.3/0.6 = 3/6 = 1/2;

$P(\overline{A}/\overline{B})$ = 0.1/0.3 = 1/3.

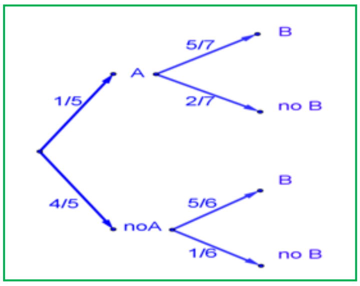


Actividades propuestas

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	0.4	0.2	0.6
No B = $\overline{B}$	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

36. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



37. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

38. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	**Placebo (no M)**	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: $P(M/C)$

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: $P(\overline{M}/C)$.

39. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

40. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

41. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

42. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

SOLUCIONES:

29. 0,936

30. 0,000008 y 0,999992

31. a) 0,000009 b) 0,00598 c) 0,994 d) 0,0029

32. a) ½ b) ¼ c) ⅛ d) ⅞

33. a)

	Carr	Urb	
Vic	0,27	0,29	0,56
Mat	0,31	0,13	0,44
	0,58	0,42	1

b) $\mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) = 0{,}27$; $P(V \cap U) = 0{,}29$; $P(M \cap C) = 0{,}31$; $P(M \cap U) = 0{,}13$

$P(V) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) + (V \cap U) = 0{,}56$; $P(M) = P(M \cap C) + P(M \cap U) = 0.44$

$P(C) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) + P(M \cap C) = 0{,}58$; P(U)=$P(V \cap U) + P(M \cap U) = 0{,}42$

c) $P(U/V) = \frac{0{,}29}{0{,}56} = 0{,}54$; $P(C/V) = \frac{0{,}27}{0{,}56} = 0{,}48$

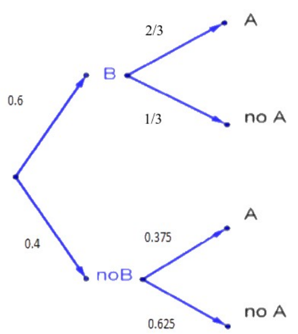
$P(V/U) = \frac{0{,}30}{0{,}43} = 0{,}7$; $P(V/C) = \frac{0{,}27}{0{,}58} = 0{,}47$

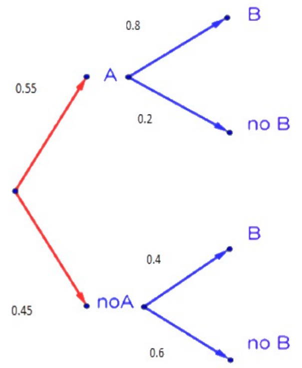
Los sucesos V y C son dependientes pues P(V) = 0,56 ≠ P(V/C) = 0,47

34. Ejercicio libre. El libro nos ofrece esta posibilidad:

	Accidentes en carretera (C)	Accidentes urbanos (U)	Totales
Accidentes (L)	0.27	0.29	0.56
Accidentes (G)	0.18	0.01	0.19
Accidentes (M)	0.13	0.12	0.25
Totales	0.58	0.42	1

35.





P(A/B) = ⅔

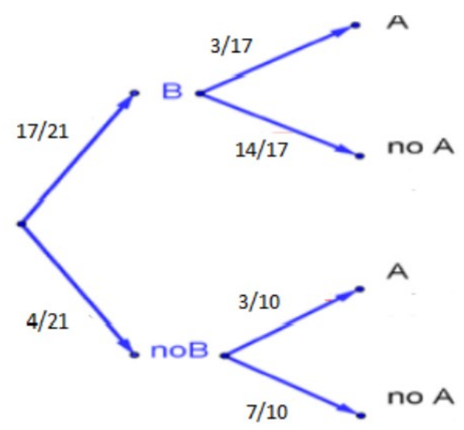
$P(A/\overline{B}) = 3/8$

P(B/A) = 0,8

$P(B/\overline{A}) = 4/9$

36.

	A	No A	Totales
B	5/35	20/30	17/21
No B	2/35	4/30	4/21
Totales	7/35	24/30	1



37. P(A/N) = 0,25 Y P(N) = 0,4

38. a) 0,62 b) 0,38

39. a) 1/6 b) 2/25 c) 37/300

40. a) 29/51 b) 22/51

41. a) 0,73 b) 0,54

42. a) 0,0665 b) 0,413