CAPÍTULO III. TEOREMAS

Las fórmulas asustan muuuucho...

Enunciado del teorema de la probabilidad total

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$$

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

… pero quedaros con la penúltima frase !!!!

Basta trabajar con la fórmula básica

de la Probabilidad Condicionada

si tienes las ideas claras:

- **Fórmula General:** P(A/B) = P(A∩B) / P(B)
- **Intersección (Sucesos Dependientes):** P(A∩B) = P(B) · P(A/B)
- **Si son independientes**, P(A/B) = P(A),

porque B no influye en que ocurra A

y volvemos a: P(A∩B) = P(B)·P(A)

1.5. Teoremas de la probabilidad total y teorema de *Bayes*

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de la página inicial: "Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis". Es decir permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral). Vamos a enunciarlo, pero ¡no te asustes! ¡Ya sabes resolver problemas en los que se usa el Teorema de *Bayes*! ¡No hace falta que te aprendas la fórmula!

Previamente vamos a enunciar un teorema que también ya has usado, el teorema de la probabilidad total, que es como un paso intermedio del teorema de *Bayes*.

Enunciado del teorema de la probabilidad total

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$$

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(A_i / B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Actividades resueltas

Antes de comprobar que SÍ sabes resolver problemas tipo *Bayes*, vamos a trabajar un poco la nomenclatura de las probabilidades condicionadas.

- *Escribe con símbolos las siguientes probabilidades:*

a) Sabemos que se ha verificado B, ¿cuál es la probabilidad de A? $\rightarrow P(A/B) = P(A \cap B) : P(B)$.

b) Probabilidad de B y $A \rightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

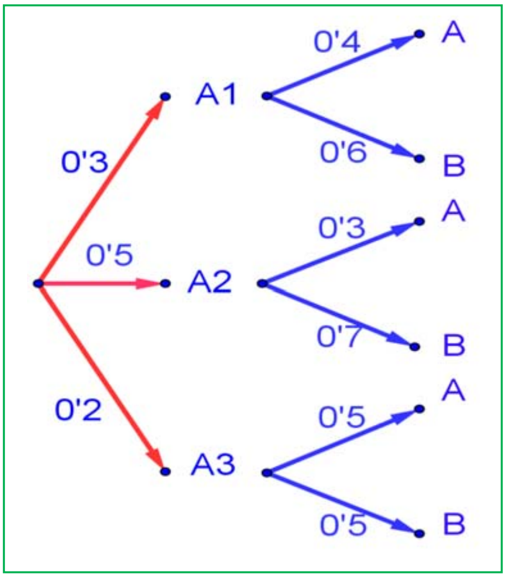
c) Ha salido una bola negra (A), probabilidad de que sea de la segunda urna (B) $\rightarrow P\ (B/A)$

d) Probabilidad de B o $A \rightarrow P(A \cup B) = P(B \cup A)$

e) El accidente ha sido en carretera (A), probabilidad de que haya sido mortal (B) $\rightarrow P\ (B/A)$

- *Tenemos un conjunto de sucesos* $\{A_1, A_2, A_3\}$ *tales que* $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$*, y son incompatibles dos a dos. Conocemos sus probabilidades:* $P(A_1) = 0.3$, $P(A_2) = 0.5$, $P(A_3) = 0.2$. *Tenemos otros dos sucesos incompatibles,* A *y* B*, de los que conocemos las probabilidades condicionadas* $P(A/A_1) = 0.4$, $P(B/A_1) = 0.6$, $P(A/A_2) = 0.3$, $P(B/A_2) = 0.7$, $P(A/A_3) = 0.5$, $P(B/A_3) = 0.5$. *Queremos calcular* $P(A_1/B)$.

Confeccionamos un árbol con los datos que tenemos.



Ahora podemos calcular las probabilidades de las intersecciones. Ya sabes que:

$$P(A_1 \cap A) = P(A_1) \cdot P(A\,/A_1) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B\,/A_1) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(A_2 \cap A) = P(A_2) \cdot P(A\,/A_2) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B\,/A_2) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$$

$$P(A_3 \cap A) = P(A_3) \cdot P(A\,/A_3) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10$$

$$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B\,/A_3) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10$$

Llevamos estos resultados a la tabla de contingencia asociada:

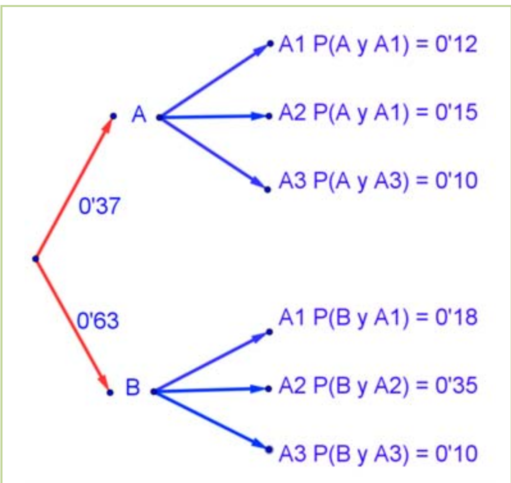
	A_1	A_2	A_2	
A	$P(A_1 \cap A) = 0.12$	$P(A_2 \cap A) = 0.15$	$P(A_3 \cap A) = 0.10$	$P(A) = 0.12+0.15+0.1= 0.37$
B	$P(A_1 \cap B) = 0.18$	$P(A_2 \cap B) = 0.35$	$P(A_3 \cap B) = 0.10$	$P(B)= 0.18+0.35+0.10=0.63$
	$P(A_1) = 0.12 + 0.18 = 0.3$	$P(A_2) = 0.15 + 0.35 = 0.5$	$P(A_3) = 0.10 + 0.10 = 0.2$	1

Sumando columnas comprobamos que no nos estamos equivocando en los cálculos pues las probabilidades que obtenemos: $P(A_1) = 0.12 + 0.18 = 0.3$; $P(A_2) = 0.15 + 0.35 = 0.5$ y $P(A_3) = 0.10 + 0.10 = 0.2$ son las conocidas.

Sumando por filas obtenemos las probabilidades:

$$P(A) = 0.12 + 0.15 + 0.1 = 0.37 \text{ y } P(B) = 0.18 + 0.35 + 0.10 = 0.63.$$

Con estas probabilidades podemos construir el otro árbol.



Ahora ya es posible calcular las otras probabilidades condicionadas, utilizando las probabilidades de la intersección y dividiendo:

$$P(A_1/A) = P(A_1 \cap A) : P(A) = 0.12/0.37 = 12/37$$

$$P(A_2/A) = P(A_2 \cap A) : P(A) = 0.15/0.37 = 15/37$$

$$P(A_3/A) = P(A_3 \cap A) : P(A) = 0.10/0.37 = 10/37$$

$$P(A_1/B) = P(A_1 \cap B) : P(B) = 0.18/0.63 = 18/63$$

$$P(A_2/B) = P(A_2 \cap B) : P(B) = 0.35/0.63 = 35/63$$

$$P(A_3/B) = P(A_3 \cap B) : P(B) = 0.10/0.63 = 10/63$$

La probabilidad pedida $P(A_1/B) = 18/63 = 2/7$.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Observa que:

Vamos a repasar los cálculos, para comprender mejor los teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Si miramos la tabla hemos obtenido $P(B)$ sumando la fila como:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

Y las probabilidades de las intersecciones las hemos obtenido multiplicando en el árbol:

$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1)$… luego:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + P(B / A_3) \cdot P(A_3).$$

Teorema de la probabilidad total: $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$

En el segundo árbol hemos obtenido $P(A_1/B)$ dividiendo $P(A_1 \cap B) : P(B)$. Para tener el teorema de Bayes basta sustituir de nuevo la probabilidad de la intersección por el producto, y utilizar el teorema de la probabilidad total:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

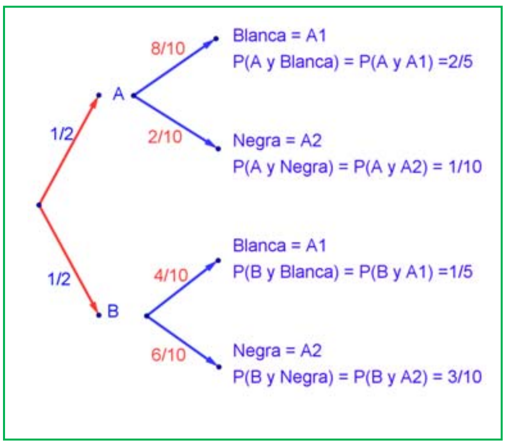
Teorema de *Bayes*: $P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$

- *Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?*

Debemos calcular $P(B/Negra)$.

Para que se parezca más al enunciado del teorema vamos a llamar a Blanca = A_1 y a Negra = A_2. El conjunto de sucesos $\{A_1, A_2\}$ verifica las condiciones del teorema de *Bayes*. Por tanto queremos calcular $P(B/ A_2)$.

Podemos construir el árbol del margen. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades.



Nos dicen que la elección de urna es al azar, por tanto $P(A) = P(B) = 1/2$.

Si sacamos una bola de la urna A sabemos que $P(Blanca/A) = P(A_1/A) = 8/10$, pues en la urna A hay 10 bolas de las que 8 son bolas blancas.

Del mismo modo sabemos:

$P(Negra/A) = P(A_2/A) = 2/10$;

$P(Blanca/B) = P(A_1/B) = 4/10$, y

$P(Negra/B) = P(A_2/B) = 6/10$.

Multiplicando calculamos las probabilidades de los sucesos compuestos:

$P(A \cap A_1) = 2/5$,

$P(A \cap A_2) = 1/10$,

$P(B \cap A_1) = 1/5$,

$P(B \cap A_2) = 3/10$.

Estos datos nos permiten construir la tabla de contingencia asociada:

	Blanca = A_1	**Negra = A_2**	
A	$P(A \cap A_1) = 2/5$	$P(A \cap A_2) = 1/10$	$P(A) = 2/5 + 1/10 = 1/2$
B	$P(B \cap A_1) = 1/5$	$P(B \cap A_2) = 3/10$	$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2$
	$P(A_1) = 2/5 + 1/5 = 3/5$	$P(A_2) = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 2/5$	1

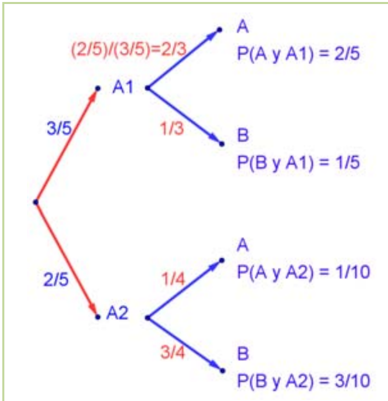
Observa que:

Se verifica el teorema de la probabilidad total:

$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2 = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2)$

En general, si hubiera un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se escribiría:

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)\cdot P(A_n)$$



Comprueba como en nuestro ejemplo se verifica ese teorema de la probabilidad total para $P(A)$, $P(B)$, P(Blanca) y P(Negra).

Y ahora construimos el otro diagrama de árbol. Conocemos $P(A_1) = 3/5$ y $P(A_2) = 2/5$, además de las probabilidades de las intersecciones, por lo que podemos calcular las probabilidades condicionadas, dividiendo:

Por ejemplo: $P(A/A_1) = P(A \cap A_1)/P(A_1) = (2/5)/(3/5) = 2/3$.

Con lo que tenemos resuelto nuestro problema pues:

$P(B$ / Negra$) = P(B/A_2) = 3/4$.

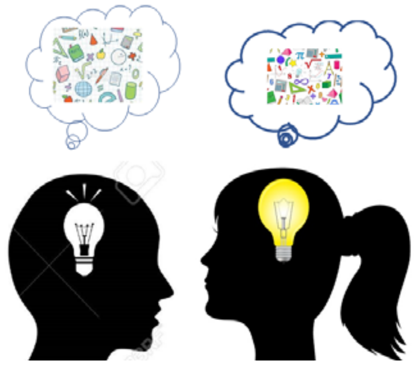
Vamos a comprobar que es el mismo resultado (y los mismos cálculos) que hubiéramos obtenido usando la expresión del teorema de *Bayes*:

$$P(B/A_2) = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2/A)\cdot P(A) + P(A_2/B)\cdot P(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap A) + P(A_2 \cap B)} = \frac{3/10}{1/10 + 3/10} = \frac{3}{4}$$

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas



43. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C. a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso. b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

SOLUCIONES:

43. a) 0,3525 b) 0,0021

44. Cierto

45. ½

46. a) 0,25 b) 0,5

47. a) 0,975 b) 0,2

48. a) 0,4167 b) 0,6 c) 0,562 d) 0,35