Gracias a los límites, podremos estudiar formalmente la continuidad de una función. Para verlo, vamos a utilizar una función DEFINIDA A TROZOS; una función que vendrá definida por una fórmula distinta en cada tramo del dominio

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x<-1 \quad \text{PRIMER TRAMO O TROZO} \\ 3 & -1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{SEGUNDO TRAMO} \\ x^2/8 & x>2 \quad \text{TERCER TRAMO} \end{cases}$$

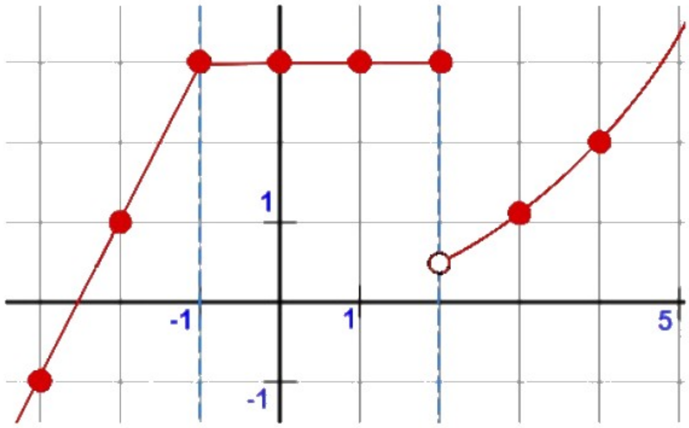
Usaremos una tabla para hallar las imágenes de cada tramo

x	$2x+5$
-3	$-6+5=-1$
-2	$-4+5=1$
-1	$-2+5=3$

x	3
-1	3
0	3
2	3

x	$x^2/8$
2	$4/8=0'5$
3	$9/8=1'125$
4	$16/8=2$

Representemos la función, haciendo uso de los puntos huecos y rellenos en los extremos de cada tramo, dependiendo de si la igualdad es válida o no



Podemos asegurar formalmente que la función es continua en $x=-1$ ya que $f(x)$ TIENE LÍMITE cuando x tiende a -1, y coincide con la imagen de -1

SUS LÍMITES LATERALES SON IGUALES

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 3 = \lim_{x\to -1} f(x)$$

Sin embargo, en $x=2$ no hay continuidad ya que el límite NO EXISTE, al no coincidir los límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \neq 1/2 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

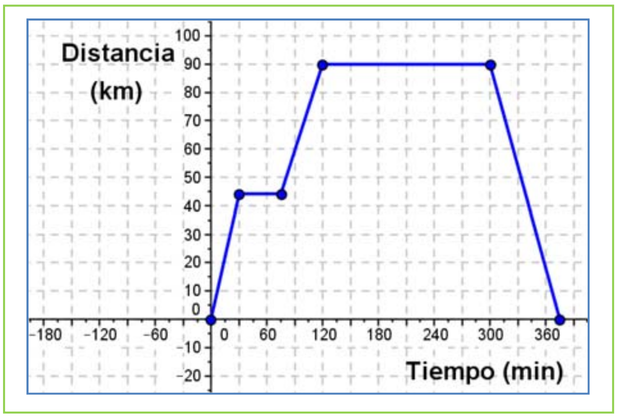
Detrás de la declaración de la renta, de algunos parking, del consumo del agua, de la factura del móvil... tenemos más funciones definidas a trozos

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Hay gráficas que no podemos representar con una única fórmula, como la del margen:

Actividades resueltas

- *La gráfica del margen representa una excursión en autobús de un grupo de 1º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca una expresión que la represente.*



Este tipo de función se denomina **función definida a trozos** pues cada trozo tiene una expresión algebraica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular sus ecuaciones pues conocemos los puntos por los que pasan: ((0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

Su expresión es:

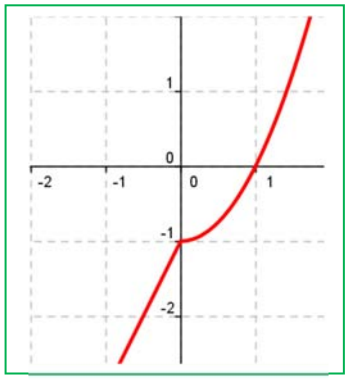
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30 \\ 45 & si\ 30< x\le 75 \\ 5x-330 & si\ 75< x\le 120 \\ 90 & si\ 120< x\le 300 \\ -\dfrac{3}{2}x+360 & si\ 300< x\le 360 \end{cases}$$

FUNCIONES Definidas a TROZOS. Representación GRÁFICA. Estas funciones se definen de diferente manera según el valor que tome la x. Susi Profe

video

https://www.youtube.com/watch?v=L9ePjFfbM5w

- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x^2-1 & si\ x>0 \end{cases}$.



Está definida de distinta manera antes de 0, que es una recta, que después de 0, que es una parábola. Simplemente dibujamos estas funciones en los intervalos indicados.

Actividades propuestas

24. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x-1 & si\ x>0 \end{cases}$.

25. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si\ x<0 \\ 2x+2 & si\ x>0 \end{cases}$.

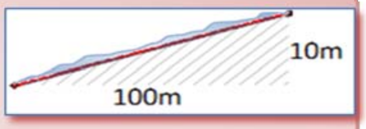
26. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<1 \\ x+3 & si\ x>1 \end{cases}$.

27. Utiliza GeoGebra para comprobar tus anteriores representaciones

CURIOSIDADES. REVISTA

¿Conoces esta señal?

Seguramente la has visto en alguna carretera, pero ¿qué indica? Mide la pendiente de la carretera con respecto a la horizontal y significa que la pendiente es del 10 %, es decir, $\frac{10}{100}$. Quiere decir que subimos 10 metros de altura mientras que avanzamos 100 metros.



- Busca en internet el perfil del *L'Angliru* y comprueba la pendiente de sus rampas.

Arquímedes y el rayo de calor

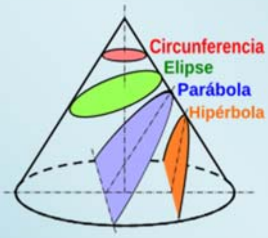
Arquímedes es uno de los personajes que más han aportado a la ciencia en la historia. Este ingeniero, físico, inventor, astrónomo y matemático nació en Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.) y es el responsable muchos teoremas e invenciones que seguramente habrás oído, como el famoso principio de Arquímedes, o el tornillo de Arquímedes utilizado en las cadenas de producción de muchas empresas.

Cuando los romanos atacaron Siracusa, cuenta la leyenda que Arquímedes construyó un sistema que concentraba los rayos de sol en un rayo de calor que provocó el incendio de los barcos enemigos. Este sistema estaba compuesto por espejos (o escudos bien pulidos) colocados de tal forma que dibujasen una superficie parabólica.

¿Mito o realidad? No se sabe, pero en la actualidad, este sistema es la base del funcionamiento de los hornos solares.

Apolonio de Pergue

Hemos estado hablando de parábolas e hipérbolas, pero, ¿de dónde vienen esas palabras y formas? El nombre de estas curvas se lo debemos a Apolonio de Pergue (262 a.C.- 190 a.C.) que estudió este tipo de funciones en su obra *Las Cónicas*. Las curvas surgen de los cortes de un cono: dependiendo el ángulo de corte, obtenemos unas curvas u otras. Es como cortar una barra de pan.



Funciones cuadráticas

11. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.

12. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = 2.5x^2$ b) $y = -1.2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0.7x^2$.

13. Representa la gráfica de las funciones parabólicas siguientes e indica el vértice:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina los elementos de las parábolas siguientes

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funciones de proporcionalidad inversa

15. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas $y = k/x$ que pasan por los puntos que se indican. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a) (5, 1), b) (4, –1) c) (1, 4) d) (–2, –4).

16. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.

17. Determina el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2.3/x$ b) $y = -1.7/x$ c) $y = 3.2/x$ d) $y = -2.1/x$.

18. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$.

20. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y=\dfrac{2x-3}{x+4}$ b) $y=\dfrac{-x-3}{2x+1}$ c) $y=\dfrac{2x-3}{3x-2}$ d) $y=\dfrac{x+2}{-x-3}$.

Funciones definidas a trozos

21. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<-1\\ x^2-1 & si\ x>-1\end{cases}$.

22. Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x)=\begin{cases}x+1 & si\ x<2\\ 2x+1 & si\ x>2\end{cases}$.

23. Indica los intervalos donde la función $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & si\ x<2\\ -x^2+4 & si\ x>2\end{cases}$ es creciente.

24. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}3x-2 & si\ x<1\\ 1/x & si\ x>1\end{cases}$.