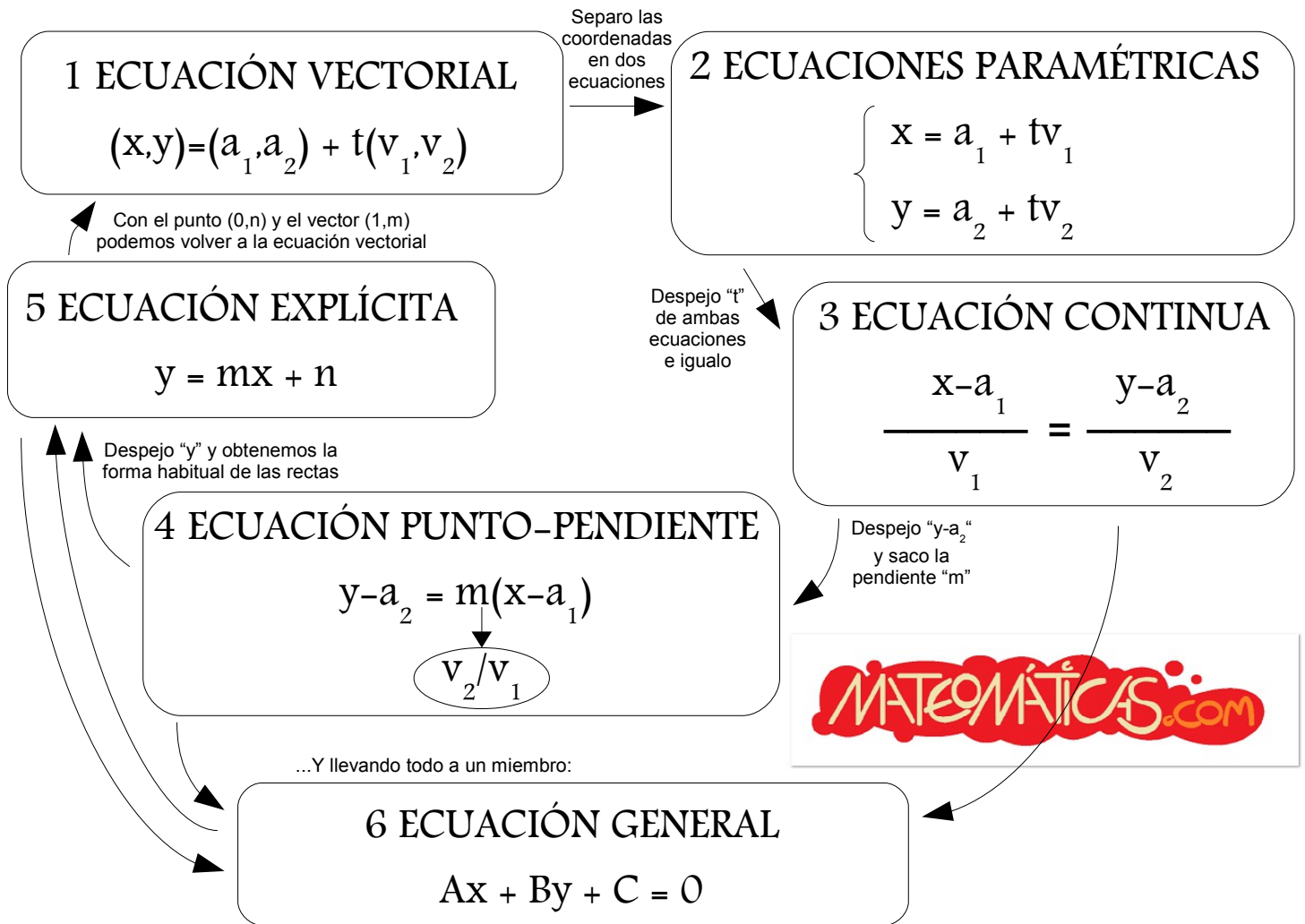
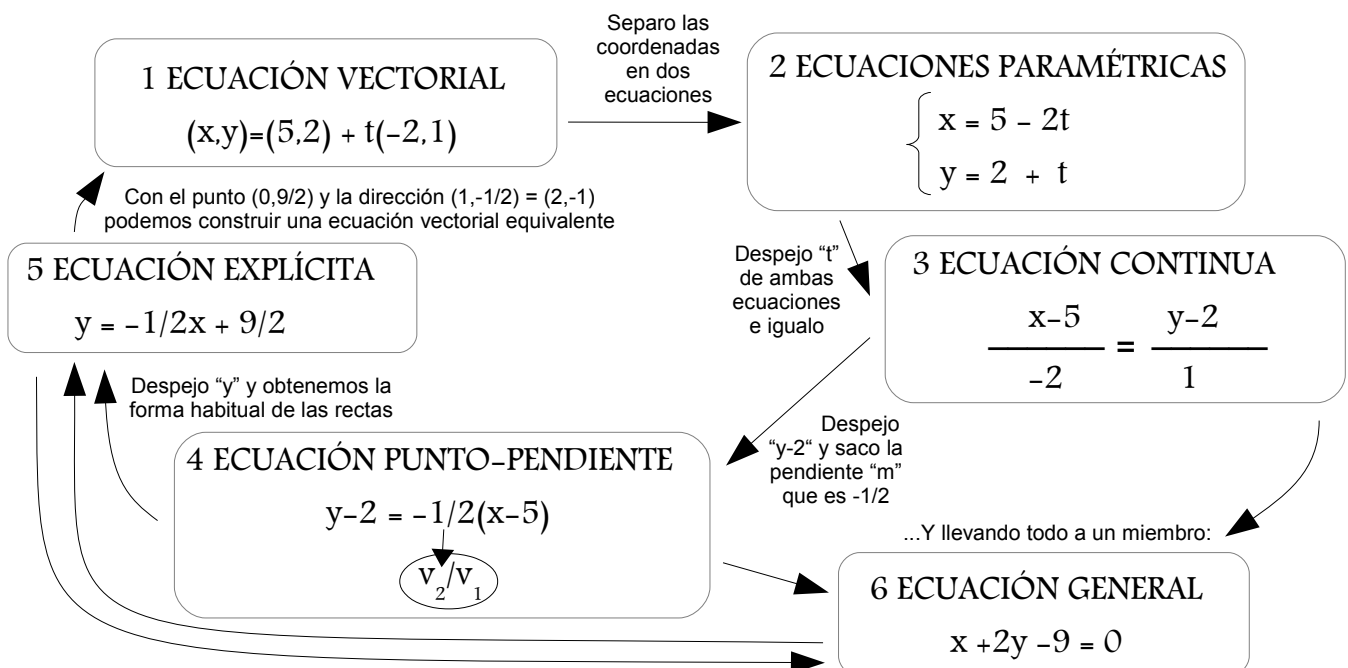


# RECTAS

Una recta queda definida con un punto  $P(a_1, a_2)$  y una dirección  $\vec{v}=(v_1, v_2)$



Veamos un ejemplo. Hallems la recta que pasa por el punto  $P(5,2)$  con dirección  $\vec{v}=(-2,1)$ :



# POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean dos rectas con ecuación implícita:

1ª recta:  $y = mx + n$

2ª recta:  $y = m'x + n'$



Posiciones Relativas {  
 PARALELAS: Si  $m = m'$  (si además  $n = n'$ , es que son iguales)  
 SECANTES: Si  $m \neq m'$   
 PERPENDICULARES: Si  $m \cdot m' = -1$  (cada pendiente es la opuesta de la inversa de la otra)

Sean dos rectas con ecuación general:

1ª recta:  $Ax + By + C = 0$

2ª recta:  $A'x + B'y + C' = 0$

Posiciones relativas {  
 PARALELAS: Si  $A/A' = B/B'$  (si los coeficientes de "x" e "y" son proporcionales)  
 Si además  $A/A' = B/B' = C/C'$  son iguales (todos los coeficientes serían proporcionales)  
 SECANTES: Si  $A/A' \neq B/B'$   
 PERPENDICULARES: Si  $A \cdot A' + B \cdot B' = 0$

Atendiendo a las pendientes:

Mismas pendientes ( $1/2$ ):  
 Rectas paralelas

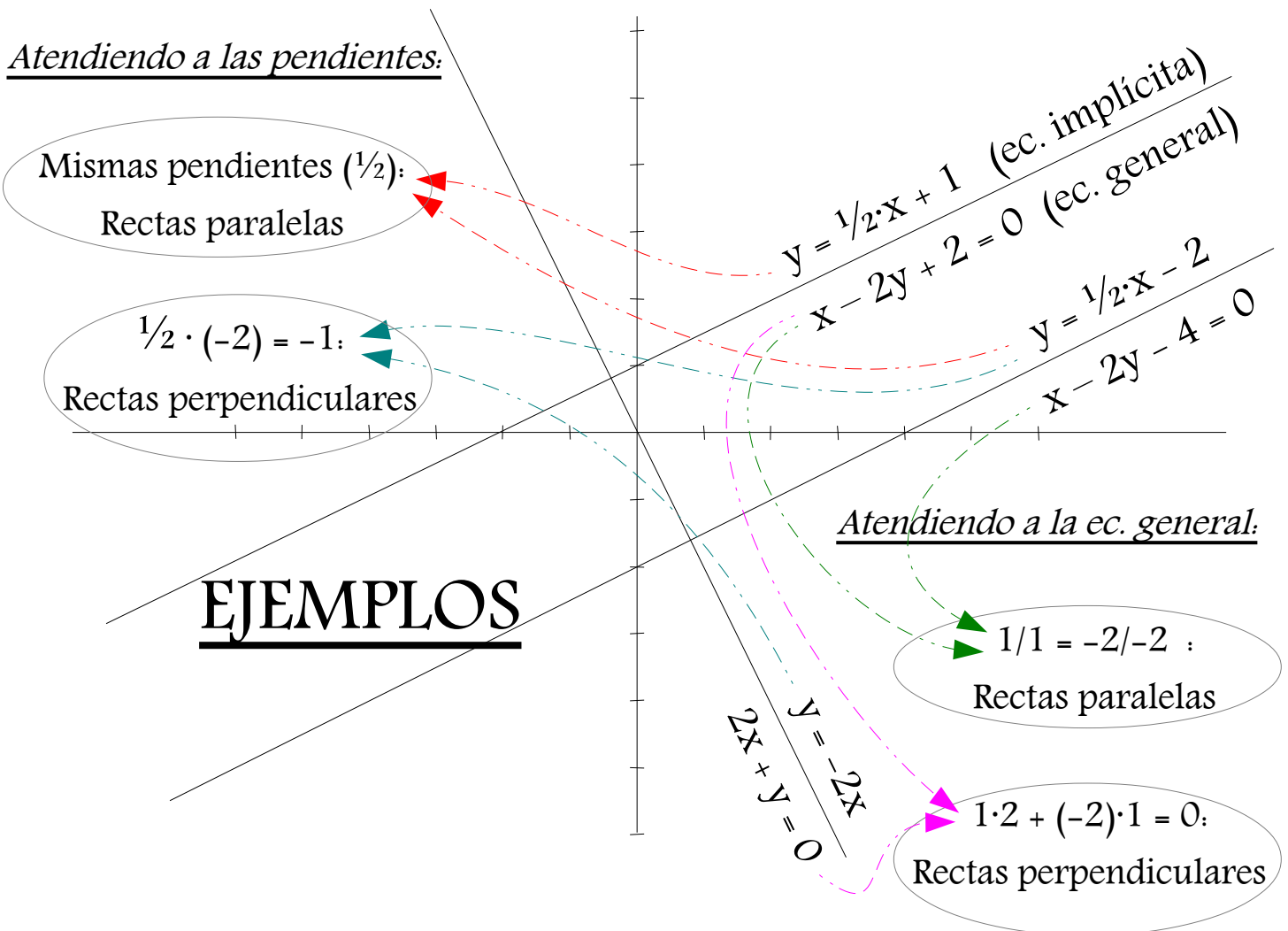
$1/2 \cdot (-2) = -1$ :  
 Rectas perpendiculares

## EJEMPLOS

Atendiendo a la ec. general:

$1/1 = -2/-2$  :  
 Rectas paralelas

$1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$ :  
 Rectas perpendiculares



### 3.3. Ecuaciones y rectas y planos

#### Ecuaciones de la recta en el plano.

Ya sabes que la **ecuación de una recta** en el plano es:  $y = mx + n$ . Es la expresión de una recta como función. Esta ecuación se denomina **ecuación explícita** de la recta.

Si pasamos todo al primer miembro de la ecuación, nos queda una ecuación:  $ax + by + c = 0$ , que se denomina **ecuación implícita** de la recta.

**Ecuación vectorial:** También una recta queda determinada si conocemos un punto:  $A(a_1, a_2)$  y un vector de dirección  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Observa que el vector  $\mathbf{OX}$  puede escribirse como suma del vector  $\mathbf{OA}$  y de un vector de la misma dirección que  $\mathbf{v}$ ,  $t\mathbf{v}$ . Es decir:

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{v},$$

donde a  $t$  se le denomina parámetro. Para cada valor de  $t$ , se tiene un punto distinto de la recta. Con coordenadas quedaría:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

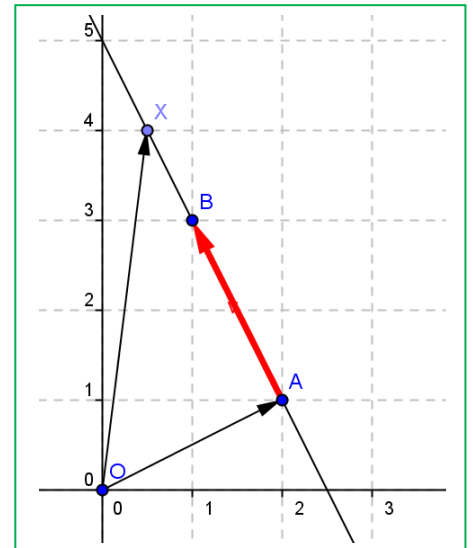
que es la **ecuación paramétrica** de la recta.

**Paralelismo:** Dos rectas  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  son paralelas si  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ , y

dos rectas  $r: \mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{v}$  y  $r': \mathbf{OX} = \mathbf{OB} + t'\mathbf{w}$  son paralelas si  $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$  pues en ambos casos, así tienen la misma dirección.

**Perpendicularidad:** Dos rectas  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  son perpendiculares si  $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$ , y dos rectas  $r: \mathbf{OX} =$

$\mathbf{OA} + t\mathbf{v}$  y  $r': \mathbf{OX} = \mathbf{OB} + t'\mathbf{w}$  son perpendiculares si  $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = 0$ , pues en esos casos puedes comprobar gráficamente que sus direcciones son ortogonales.

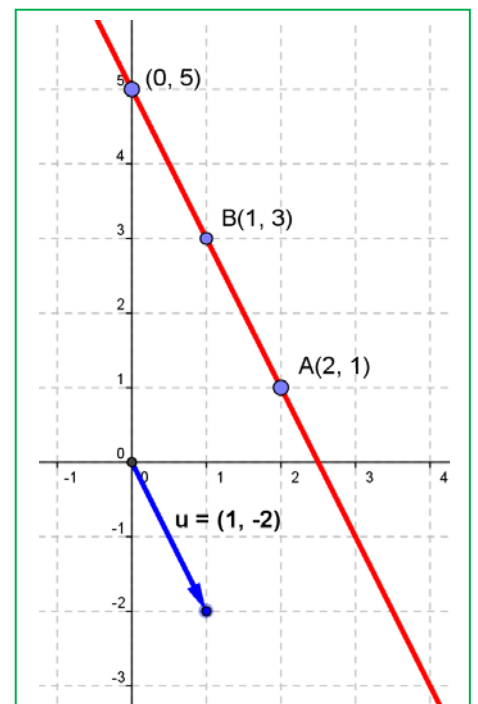


#### Actividades resueltas

- ✚ De la recta de ecuación explícita  $y = -2x + 5$ , conocemos la pendiente,  $-2$ , y la ordenada en el origen,  $5$ . La pendiente nos da un vector de dirección de la recta, en general  $(1, m)$ , y en este ejemplo:  $(1, -2)$ . La ordenada en el origen nos proporciona un punto, en general, el  $(0, n)$ , y en este ejemplo,  $(0, 5)$ . La ecuación paramétrica de esta recta es:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

Su ecuación implícita es:  $-2x - y + 5 = 0$ .



- ✚ Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto  $A(2, 1)$  y tiene como vector de dirección  $\mathbf{v} = (1, 2)$ .

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- ✚ Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(2, 1)$  y  $B(1, 3)$ . Podemos tomar como vector de dirección el vector  $\mathbf{AB} = (1 - 2, 3 - 1) = (-1, 2)$ , y escribir su ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

La recta es, en los tres ejemplos, la misma, la de la figura. Con ello podemos observar que una recta puede tener muchas ecuaciones paramétricas dependiendo del punto y del vector de dirección que se tome. Pero eliminando el parámetro y despejando "y" llegamos a una única ecuación explícita.

## Actividades propuestas

39. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(6, 2)$  y  $B(3, 9)$ , de forma explícita, implícita y paramétrica. Representala gráficamente.
40. Representa gráficamente la recta  $r: -2x - y + 5 = 0$ . Comprueba que el vector  $(-2, -1)$  es perpendicular a la recta. Representa gráficamente la recta  $s: x - 2y = 0$  y comprueba que es perpendicular a  $r$ .
41. Representa gráficamente la recta  $r: -2x - y + 5 = 0$ . Representa gráficamente las rectas:  $-2x - y = 0$ ,  $-2x - y = 1$ , y comprueba que son paralelas a  $r$ .

### Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.

La ecuación **implícita de un plano** es:  $ax + by + cz + d = 0$ . Observa que es parecida a la ecuación implícita de la recta pero con una componente más.

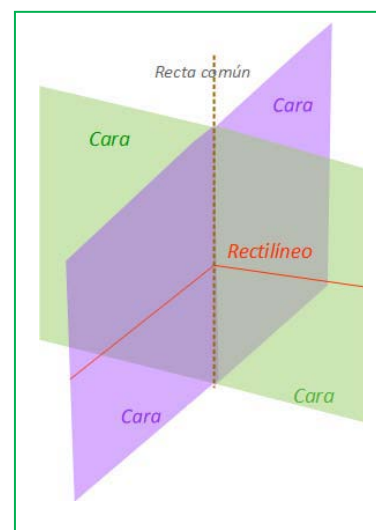
La **ecuación vectorial de una recta** en el espacio es:  $\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{v}$ , aparentemente igual a la ecuación vectorial de una recta en el plano, pero al escribir las coordenadas, ahora puntos y vectores tiene tres componentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta también puede venir dada como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos puntos determinan una recta y tres puntos determinan un plano.



## Actividades resueltas

✚ Escribe la ecuación de la recta en el espacio que pasa por los puntos  $A(1, 2, 3)$  y  $B(3, 7, 1)$ .

Tomamos como vector de dirección de la recta el vector  $\mathbf{AB} = (3 - 1, 7 - 2, 1 - 3) = (2, 5, -2)$  y como punto, por ejemplo el  $A$ , entonces:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar las ecuaciones de dos planos que se corten en dicha recta, eliminando  $t$  en dos ecuaciones. Por ejemplo, sumando la primera con la tercera se tiene:  $x + z = 4$ . Multiplicando la primera ecuación por 5, la segunda por 2 y restando, se tiene:  $5x - 2y = 1$ . Luego otra ecuación de la recta, como intersección de dos planos es:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

✚ Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  de la actividad anterior, y  $C(2, 6, 2)$ .

Imponemos a la ecuación  $ax + by + cz + d = 0$  que pase por los puntos dados:

$$a + 2b + 3c + d = 0$$

$$3a + 7b + c + d = 0$$

$$2a + 6b + 2c + d = 0.$$

Restamos a la segunda ecuación la primera, y a la tercera, también la primera:

$$a + 2b + 3c + d = 0$$

$$2a + 5b - 2c = 0$$

$$a + 4b - c = 0$$

Multiplicamos por 2 la tercera ecuación y le restamos la segunda:

$$a + 2b + 3c + d = 0$$

$$a + 4b - c = 0$$

$$3b = 0$$

Ya conocemos un coeficiente,  $b = 0$ . Lo sustituimos en las ecuaciones:

$$a + 3c + d = 0$$

$$a - c = 0$$

Vemos que  $a = c$ , que sustituido en la primera:  $4c + d = 0$ . Siempre, al tener 3 ecuaciones y 4 coeficientes, tendremos una situación como la actual, en que lo podemos resolver salvo un factor de proporcionalidad. Si  $c = 1$ , entonces  $d = -4$ . Luego  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  y  $d = -4$ . Es el plano de ecuación:

$$x + z = 4$$

plano que ya habíamos obtenido en la actividad anterior.

### Actividades propuestas

42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(6, 2, 5)$  y  $B(3, 9, 7)$ , de forma explícita, y como intersección de dos planos.
43. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.
44. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.
45. En el cubo de diagonal  $O(0, 0, 0)$  y  $A(6, 6, 6)$  escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

### 3.4. Algunas ecuaciones

#### Actividades resueltas

✚ ¿Qué puntos verifican la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ ?

¡Depende! Depende de si estamos en un plano o en el espacio.

En el plano, podemos ver la ecuación como que el cuadrado de la distancia de un punto genérico  $X(x, y)$  al origen  $O(0, 0)$  es siempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lugar de todos los puntos del plano que distan 1 del origen es la circunferencia de centro  $O(0, 0)$  y radio 1.

En el espacio el punto genérico  $X(x, y, z)$  tiene tres coordenadas, y  $O(0, 0, 0)$ , también. No es una circunferencia, ni una esfera. ¿Y qué es? Lo que está claro es que si cortamos por el plano  $OXY$ , ( $z = 0$ ) tenemos la circunferencia anterior. ¿Y si cortamos por el plano  $z = 3$ ? También una circunferencia. Es un cilindro. El cilindro de eje, el eje vertical, y de radio de la base 1.

✚ ¿Qué puntos verifican la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ?

Ahora sí. Sí podemos aplicar la distancia de un punto genérico  $X(x, y, z)$  al origen  $O(0, 0, 0)$ ,

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Es la ecuación de la superficie esférica de centro el origen y radio 1.

#### Actividades propuestas

46. Escribe la ecuación del cilindro de eje, el eje  $OZ$  y radio 2.
47. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.

48. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$  y radio 1.

49. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro  $A(2, 5)$  y radio 2.

50. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

## 4. MOVIMIENTOS Y TRANSFORMACIONES

### 4.1. Traslaciones en el plano

Si Susana está en su casa y quiere ir a casa de Nadia, que vive 2 calles al Este y 3 calles al Norte, el trayecto que debe hacer es el que en la figura está dibujado en gris.

Llamamos "O" a la posición de la casa de Susana, y "A" a la posición de la casa de Nadia. Si Susana tuviera un helicóptero podría ir directamente en línea recta y seguiría la dirección OA. Lo representamos con una flecha y se denomina vector fijo.

Un vector fijo **OA** es un segmento orientado con origen en el punto O y extremo en el punto A. Tiene una dirección, la de la recta, un sentido, desde O hasta A, y una longitud, a la que llamamos módulo.

Un **vector fijo OA**, de **origen** en O y **extremo** en el punto A, se caracteriza por:

Su **módulo**, que es la longitud del segmento OA y que se escribe  $|OA|$ .

Su **dirección**, que es la recta que contiene al segmento.

Su **sentido** que va desde el origen O hasta el extremo A.

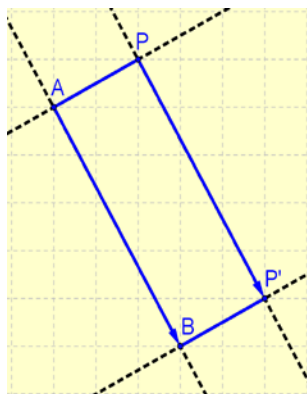
Las coordenadas o componentes de un vector vienen determinadas por su origen y su extremo.

#### Ejemplo:

Si conocemos las coordenadas del punto origen y del punto final podemos calcular las coordenadas del vector. Observa el dibujo del margen y comprueba que si A (2, 3) y B (6, 5) las coordenadas del vector fijo **AB** son  $\mathbf{AB} = (6 - 2, 5 - 3) = (4, 2)$ .

En general, si A (a, b) y B (c, d) entonces  $\mathbf{AB} = (c - a, d - b)$

El módulo de un vector se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras. Así, el vector de coordenadas  $\mathbf{u} = (x, y)$  tiene de módulo:  $|\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Un coche se mueve por la ciudad desde el domicilio del dueño hasta su trabajo, y se ha trasladado 4 calles hacia el norte y 3 calles hacia el este.

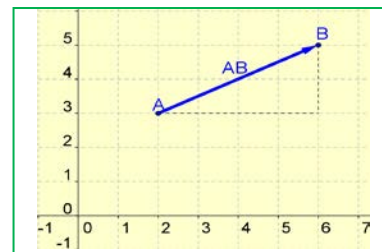
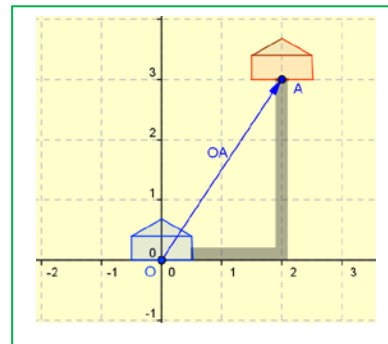
Es posible conocer una **traslación** si sabemos el punto de origen A y el de destino B. Estos dos puntos, A y B, determinan el **vector de traslación AB**. **AB** es un vector fijo, representante del vector libre **u** de iguales coordenadas.

Para definir una **traslación** basta conocer su **vector de traslación**.

Si la traslación de vector libre  $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$  transforma un punto del plano P en otro P', entonces **AB** y **PP'** tienen igual módulo, dirección y sentido. Son el mismo vector libre. Tienen las mismas coordenadas.

Si con la traslación de vector **AB** trasladamos el punto P hasta el punto P' entonces **ABP'P** es un **paralelogramo**, y  $\mathbf{AB} = \mathbf{PP'}$

Para trasladar una figura se trasladan los puntos que la determinan. Como en una traslación todos los puntos se mueven sobre rectas paralelas y una misma distancia, se puede usar la escuadra y el cartabón para trazar las rectas paralelas y trasladar sobre ella algunos puntos de la figura, para lo que se debe medir siempre la misma distancia sobre la recta.



## Actividades propuestas

51. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.

52. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?



Un friso en Camboya

53. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

54. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

## 4.2. Traslaciones en el espacio

Las traslaciones en el espacio tienen las mismas propiedades que las traslaciones en el plano.

Imagina un avión que se mueve. El avión se traslada.

Una traslación en el espacio, igual que una traslación en el plano, es el movimiento que consiste en deslizar un objeto según una dirección. La traslación está determinada por la distancia que se traslada, la dirección de la recta sobre la que se traslada, y por su sentido. Por tanto:

Para determinar una traslación en el espacio basta conocer su **vector de traslación**.

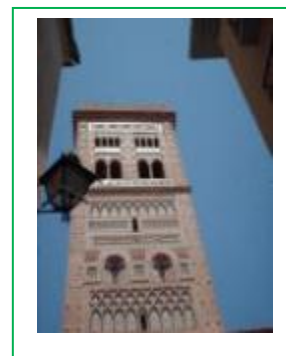
La única diferencia es que ahora el vector de traslación tiene tres componentes:  $\mathbf{AB} = (a, b, c)$ .

**Ejemplo:**

✚ Para trasladar el punto  $P(2, 4, -1)$  mediante la traslación de vector  $\mathbf{AB} = (-3, 5, 2)$ , simplemente sumamos las coordenadas:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

La traslación en el espacio no deja ningún punto invariante.



## Actividades propuestas

55. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

56. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.