

π

Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Ya sabes que vale **3,141592...** con infinitas cifras decimales no periódicas

En la Biblia se le daba el valor de 3.

En el antiguo Egipto, $256/81 = 3,16049$

En Babilonia, $3 + 1/8 = 3,125$.

Con los ordenadores cada vez conocemos más cifras, en 1949 se conocían 2037, y en 2011, más de 10 billones (¡un 1 y 13 ceros!)

Los árabes obtuvieron hasta 17 cifras decimales

e

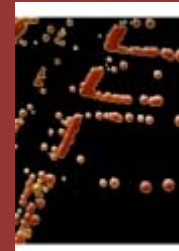
Otro número irracional. *Euler* calculó 23 de sus cifras decimales

Vale **2,718281828459...** con infinitas cifras decimales no periódicas

Es la base de los logaritmos neperianos

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

Una de las numerosas aplicaciones del número e en Biología es el crecimiento exponencial de poblaciones. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que lo limiten. En esos casos se aplica la fórmula: $P = P_0 \cdot e^t$ que permite averiguar cuál será la población P en un tiempo t a partir de la población inicial P_0 .



Φ

¡El número de oro! ¡La divina proporción!

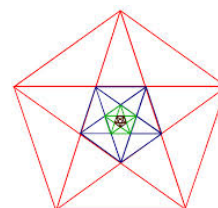
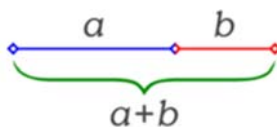
Vale **1,61803398874989...** con infinitas cifras decimales no periódicas

Se define como $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

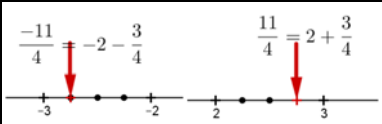
Observa que se define con un radical $\sqrt{5}$. Es un número irracional **algebraico**, mientras que los otros dos, π y e , son **transcendentes**

Se obtiene como una proporción, al dividir un segmento de longitud $a + b$, en dos partes de forma que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



RESUMEN

Prioridad de las operaciones	1º Paréntesis interiores, 2º Potencias y raíces, 3º Productos y divisiones, 4º Sumas y restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signo de la suma	$(+) + (+) = (+)$ se suman, $(-) + (-) = (-)$ se suman. $(+) + (-) = ?$ tiene el signo del mayor en valor absoluto.	$-7/3 - 8/3 = -15/3 = -5$ $-12/5 + 8/5 = -4/5$
Signo del producto y la división	Si tienen igual signo da positivo. $(+) \cdot (+) = (-) \cdot (-) = (+)$ Si tienen signo contrario da negativo. $(+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = (-)$	$-4 \cdot (-10) = +40$ $+2 \cdot (-15) = -30$
Número Racional	Un número r es racional si puede escribirse como $r = a/b$ con a, b enteros y $b \neq 0$.	2; $3/8$; $-7/2$ son racionales. También 0.125 y 2.6777... $\sqrt{2}$ y π no lo son.
Fracción irreducible	Se obtiene dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. Numerador y denominador son primos entre sí.	$360/840 = 3/7$, la última es irreducible.
Fracciones equivalentes	Son equivalentes las fracciones que tienen igual expresión decimal. Dos fracciones equivalentes representan al mismo número racional. Sus productos cruzados valen lo mismo.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = 0.75$ son equivalentes. $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$
Ordenación de fracciones	Se pasan a común denominador o se halla su valor decimal o se usa la lógica y el truco $a/b < c/d$ si $ad < bc$ para números positivos.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ ya que $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$ Entre otros motivos
Representación	Si es necesario se pasan a forma mixta. Para $n + a/b$ dividimos la unidad que va de n a $n + 1$ en b partes iguales y tomamos a . Para $-n - a/b$ dividimos la unidad que va de $-n$ a $-n - 1$ en b partes iguales y contamos a empezando en $-n$.	
Suma y resta de fracciones	Se pasan a común denominador y se suman (restan) los numeradores.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$
Producto y división	$a/b \cdot c/d = ac/bd$ $a/b : c/d = a/b \cdot d/c = ad/bc$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 14} = \frac{6}{7}$
Fracción de un número	a/b de $x = a/b \cdot x = (ax)/b$	$3/4$ de $60 = 3/4 \cdot 60 = 45$ $3/4$ de $4/5 = 3/4 \cdot 4/5 = 3/5$
Cifras significativas	Es el número de cifras "con valor" que se utilizan para aproximar un número	0.025 tiene 2 3.020 tiene 4 3000 no sabemos las que tiene

Errores	Error absoluto: $EA = \text{valor real} - \text{valor aproximado}$ Error relativo: $ER = \frac{EA}{ \text{Valor real} }$ se multiplica por 100 para obtener el % de ER.	$\frac{2}{3} \approx 0.7 \Rightarrow EA \approx 0.033$ $\Rightarrow ER \approx \frac{0.033}{2/3} \approx 0.050 \Rightarrow 5\%$
Fracciones y decimales	La expresión decimal de una fracción siempre es exacta o periódica. Exacta si el denominador sólo tiene como factores primos el 2 o el 5. Periódica en caso contrario.	$3/40 = 0.075$ exacta $5/12 = 0.41666...$ periódica
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: se divide el número sin la coma entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales. Expresión decimal periódica: Se multiplica N por potencias de 10 hasta conseguir 2 números con la misma parte decimal, se restan y se despeja N.	$3.175 = 3\,175/1\,000 = 127/40$ $N = 2.0333...$ $100N - 10N = 183$ $90N = 183 \Rightarrow$ $N = 183/90 = 61/30.$
N. Reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	$0.333333; \pi; \sqrt{2}$
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos no pertenecen al intervalo	$(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\}.$ $(2, 7) \Rightarrow$ 
Intervalo cerrado	Los extremos SI pertenecen al intervalo	$[-2, 2] = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$ $[-2, 2] \Rightarrow$ 
Intervalos Semiabiertos (o semicerrados)	Intervalo con un extremo abierto y otro cerrado	$[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ $[-8, 0) \Rightarrow$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo abierto: $E(a, r) = (a - r, a + r)$	$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$ 

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla paso a paso

$$(-5 + 4 \cdot (-2) + 7) : (7 - (3 - 4) \cdot (-1))$$

2. Ordena de menor a mayor:

$$\frac{8}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{38}{45}, \frac{77}{90}, \frac{-9}{8}$$

3. Indica razonadamente qué fracción es mayor:

$$a) \frac{102}{101} \text{ y } \frac{98}{99} \quad b) \frac{98}{99} \text{ y } \frac{97}{98} \quad c) \frac{-102}{101} \text{ y } \frac{-103}{102}$$

4. Demuestra que
- $4.999... = 5$

Generaliza: ¿Cuánto vale $n.999...$?

5. Usa la calculadora o una hoja de cálculo y reflexiona sobre la jerarquía de operaciones:

$$a) 2.34567 / 361.8792 + 7.835261 * 4319.8872 - 63.52$$

$$b) 2.34567 / (361.8792 + 7.835261) * (4319.8872 - 63.52)$$

$$c) (2.34567 / 361.8792) + (7.835261 * 4319.8872) - 63.52$$

$$d) (2.34567 / 361.8792) + 7.835261 * (4319.8872 - 63.52)$$

6. Pasa a forma mixta:
- $\frac{16}{9}; \frac{152}{6}; \frac{-17}{5}; \frac{-23}{4}$

7. Representa de forma
- exacta**
- en la recta numérica:

$$\frac{760}{240}; 3.125; -\frac{46}{14}; -2.1666...$$

8. Simplifica:

$$a) \frac{2 \cdot 7 \cdot 15}{21 \cdot 10} \quad b) \frac{10 + 6}{10 - 2} \quad c) \frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 5 + 10}$$

9. Halla la fracción que cae justo en medio de
- $3/2$
- y
- $9/4$
- en la recta numérica.

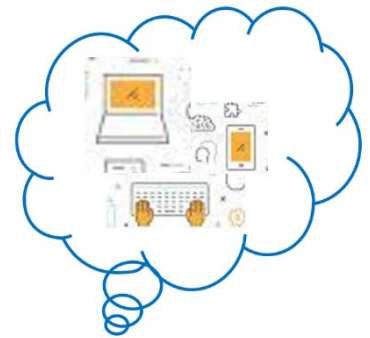
Pista: La media aritmética $\frac{a+b}{2}$

Representa las 3 fracciones en la recta numérica.

10. La media armónica se define como $H(a, b) = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, el inverso de la media aritmética de los inversos.

$$a) \text{ Demuestra que } H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$$

$$b) \text{ Halla } H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)$$



11. Halla la fracción inversa de $3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10}$

12. Opera y simplifica: $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2}$

13. Resuelve paso a paso:

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5} : \frac{4}{6}}{\frac{3}{5} : \left(\frac{1}{6} - 2\right)}$$

14. Calcula las dos terceras parte de la sexta parte del 80 % de 900.

15. Halla el número tal que sus cuatro tercios valen 520.

16. ¿Cuántos botes de tres octavos de litro puedo llenar con 12 litros?

17. Calcula la fracción por la que hay que multiplicar 450 para obtener 720.

18. Si 100 pulgadas son 254 cm:

a) Halla el largo en centímetros de una televisión si la altura son 19,2 pulgadas y largo/alto = 4/3

b) Igual pero ahora largo/alto = 16/9.

19. Si en una clase el 77.777... % de los alumnos aprueban y hay más de 30 alumnos, pero menos de 40, ¿cuántos alumnos son y cuántos aprueban?

20. Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (*Problema de la Olimpiada de Albacete*. ¡Se debe tener en cuenta no los panes que uno ha puesto sino lo que realmente ha aportado (lo puesto menos lo comido)).

21. Aproxima los números 32 567 y 1.395 con 2 cifras significativas y di en cuál se comete menor error relativo.



22. π no puede representarse mediante una fracción de enteros, pero ¿puedes hallar una fracción que lo aproxime con 5 cifras significativas?

23. Aproximamos π por:

a) Simplifica hasta una fracción impropia irreducible.

b) Halla el error absoluto y el error relativo.

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$

24. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de $\frac{3}{5}$ de litro?

25. Halla un número entero de tal forma que: su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, su quinta parte, su sexta parte y su séptima parte sean números enteros.

26. A la unidad le quito sus 2 quintas partes. ¿Por qué fracción hay que multiplicar el resultado para llegar otra vez a la unidad?

27. Halla la fracción resultante:

a) Quito 1 tercio de lo que tengo y luego añado 1 tercio de lo que queda.

b) Añado 1 tercio de lo que tengo y después quito 1 tercio del resultado.

28. Estás aburrido y decides jugar a lo siguiente: Avanzas un metro en línea recta, retrocedes la mitad, avanzas la mitad de lo que has retrocedido en el último paso, retrocedes la mitad de lo que has avanzado en el último paso, ...

Si lo haces muchas, pero que muchas veces, ¿cuánto avanzas en total?

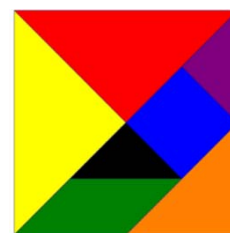
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots =$$

29. Darío da pasos de $\frac{3}{5}$ de metro, su perro Rayo da pasos de $\frac{1}{4}$ de metro. Si ambos van a igual velocidad y Rayo da 360 pasos por minuto, ¿cuántos pasos por minuto dará Darío?

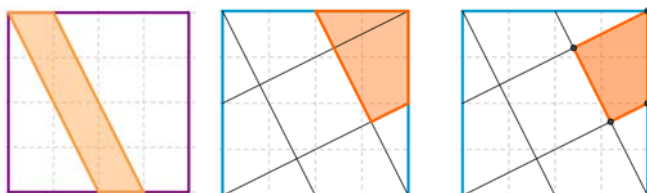
30. La figura de al lado es un "Tamgran".

a) Halla la fracción que se corresponde con cada una de las 7 piezas.

b) Si el lado del cuadrado es de 20 cm, halla el área de cada pieza.



31. Si el lado del cuadrado es de 4 cm halla la fracción y el área de la zona coloreada:



32. Calcula:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2$

b) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{3}{4}\right)^3 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$

c) $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3$

AUTOEVALUACIÓN

1. Sabes operar con números enteros, conoces la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis. Resuelve paso a paso:

$$(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2)$$

2. Sabes obtener fracciones equivalentes. Ordena de **mayor a menor**:

$$\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4}$$

3. Sabes representar fracciones de forma exacta en la recta numérica. Representa:

$$\frac{3}{4}; \frac{17}{6}; \frac{-11}{7}; -0.125$$

4. Sabes operar con fracciones. Resuelve paso a paso y simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : \left(2 - \frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

5. Sabes hallar la fracción de un número y la fracción de una fracción.
 a) Halla las cuatro quintas partes de los cinco octavos de 360.
 b) Una botella tiene llenas sus siete octavas partes, si contiene 840 cm³, ¿cuánto le cabe llena?
6. Sabes redondear y calcular el error relativo cometido. Aproxima los números 9 859 y 9.945 con 2 cifras significativas y calcula los errores relativos cometidos (en %), ¿cuál es menor?
7. Sabes distinguir cuándo una fracción tiene una expresión decimal exacta.

- a) Di cuáles de las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{6}{120}; \frac{5}{180}; \frac{42}{210}$$

- b) ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^{10} \cdot 5^6}$?

- c) ¿Cuántas cifras como máximo puede tener el periodo de 1/97?

8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción y simplifica:

a) 2.225 b) 2.2252525... c) $\frac{0.125}{0.125125125...}$

9. Sabes resolver problemas mediante fracciones.

Una medusa crece cada semana un tercio de su volumen.

- a) ¿Cuántas semanas deben pasar para que su volumen se multiplique por más de 3?

- b) Si su volumen actual es de 1 200 cm³, ¿cuál era su volumen hace 3 semanas?

10. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que **le queda** el 25 % se va destinado a impuestos y por último del resto que **le queda** las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aún tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

Soluciones:

1) 10.

2) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$.

3)

4) $\frac{7}{2}$.

5) a) 180;

b) 960 cm^3 .

6) $9\,859 : 9\,900 \rightarrow \text{EA} = 41 \rightarrow \text{ER} = 0.42 \%$. $9.945 : 9.9 \rightarrow \text{EA} = 0.045 \rightarrow \text{ER} = 0.45 \%$, es un poco menor el primero.7) a) Primero se simplifican, son exactas $6/120$ y $42/150$. $5/180$ tiene expresión decimal periódica.

b) 10 cifras decimales.

c) 96 cifras (de hecho las tiene).

8) a) $\frac{89}{40}$

b) $\frac{2\,203}{990}$

c) $\frac{999}{1\,000} = 0.999$

9) a) 4 semanas.

b) 506.25 cm^3 .

10) Cobraba 1 200 €. Ahora cobra 1 000 €, paga 250 € de impuestos y 300 € de hipoteca.

