

RESUMEN

Números reales	Está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales	5, -4, 2/3, 7.5, π , e, Φ ...
Densidad de los Números Reales	El conjunto de los números reales es denso, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números.	Entre 0 y 1 calculando el punto medio obtenemos infinitos puntos: 0, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, ..., 1
Valor absoluto	$ x = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$ -32 = 32 = +32 $
Distanci	$\text{Dist}(x, y) = x - y $	$\text{Dist}(3, 8) = 8 - 3 = 5$.
Intervalos	Abierto : $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ Cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ Semiabierto (izq): $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ Semiabierto (der): $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
Entornos	Es una forma especial de expresar los intervalos abiertos. Se define como el conjunto de números que están a una distancia de a menor que r : $E(a, r)$	$E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$
El número i	$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$	
Forma binómica	$z = x + i \cdot y$	
Suma de complejos	$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i \cdot (y + v)$	$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
Producto de complejos	$(x + iy) \cdot (u + iv) = (x \cdot u - y \cdot v) + i \cdot (x \cdot v + y \cdot u)$	$(2 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$
División de complejos	Se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador. Así se consigue que el denominador sea un número real	$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2}$
Forma trigonométrica	$z = r (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$	$z = 2 \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3})$
Producto de complejos	Se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos: $r_\alpha \cdot p_\beta = (r \cdot p)_{\alpha+\beta}$	$z \cdot z = 4 \cdot (\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3})$
División de complejos	Se dividen sus módulos y se restan sus argumentos: $r_\alpha : p_\beta = (r / p)_{\alpha-\beta}$	$z/z = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen } 0) = 1$
Fórmula de Moivre	$(\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)$	$(r_\alpha)^n = (r^n)_{\alpha \cdot n}$
Logaritmos	Si $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3} \right)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**Números reales**

1. Calcula los valores exactos de $a + b$, $c - a$ y $a \cdot c$ para los números: (pista: racionalizar)

$$a = 2.7$$

$$b = 3.292929\dots$$

$$c = 0.01030303\dots$$

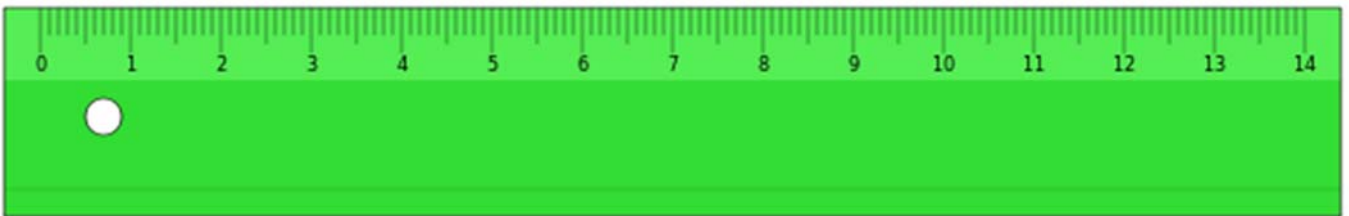
2. Descubre cuál de estos números es irracional:

a) 3.1416

b) $\sqrt{4}$

c) π

3. ¿Podemos encontrar números irracionales en las marcas de una regla graduada? ¿Hay algún punto de la regla (aunque no tenga marca) que se corresponda con un número irracional? Justifica tu respuesta.



4. Clasifica los siguientes números en orden de mayor a menor y después represéntalos en la recta:

a) 7

b) $25/4$

c) $\sqrt{45}$

d) $2 \cdot \pi$

5. Escribe una sucesión infinita de números reales dentro del intervalo $(-1, 1)$.

6. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) $|-5|$

b) $|4 - 4|$

c) $|3 \cdot 2 + 9|$

d) $\sqrt{7}$

e) $\sqrt{7^2}$

7. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (pista: x puede tener dos valores)

a) $|x| = 5$

b) $|x - 4| = 0$

c) $|3x + 9| = 21$

8. Dibuja las siguientes funciones en un gráfico:

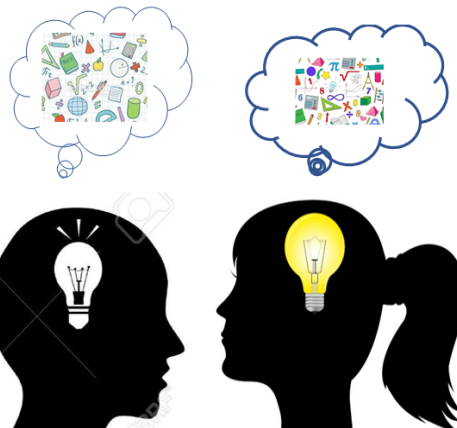
a) $f(x) = |x| - 5$

b) $f(x) = |x - 4|$

c) $f(x) = |3x + 9|$

9. Elige un día y calcula la distancia que has recorrido en total, y compárala con la distancia entre los puntos inicial (al principio del día) y final (al terminar el día).

10. Un artesano fabrica dos productos. El primero (a) le cuesta 2 horas y 3 euros en material, y el segundo (b) le cuesta 6 horas y 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de trabajo, y los vende por (a) 30 y (b) 90 euros, averigua cuál es más rentable para su negocio.



11. Entre Kroflite y Beeline hay otras cinco ciudades. Las siete se encuentran a lo largo de una carretera recta, separadas unas de otras por una distancia entera de kilómetros. Las ciudades se encuentran espaciadas de tal manera que si uno conoce la distancia que una persona ha recorrido entre dos de ellas, puede identificarlas sin ninguna duda. ¿Cuál es la distancia mínima entre Kroflite y Beeline para que esto sea posible?

12. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

- a) $|x| < 1$
- b) $|x| \leq 1$
- c) $|x| > 1$
- d) $|x| \geq 1$

13. Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3.5 unidades de -2 , calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

14. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

15. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \leq 3$.

16. Determina los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $-A$ en los casos siguientes:

- a) $A = [-11, -9]$; $B = (-1, 6)$
- b) $A = [-5, 5]$; $B = (3, 4)$

3.2. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos se heredan de las propiedades de las potencias. Ya hemos visto que:

- Si cualquier número elevado a cero es uno, entonces el logaritmo en cualquier base de uno es cero. $\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$.
- Si cualquier número elevado a uno es él mismo, entonces el logaritmo de cualquier número, tomado él mismo como base es uno. $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

- ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)
- ✓ El logaritmo de la base es 1.
- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos.

1. El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de sus factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Si cuando multiplicamos números con una misma base elevada a distintos exponentes los sumamos, entonces la suma de logaritmos de dos factores será el logaritmo del producto. Si $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Entonces $\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c \Leftrightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.

Demostración:

Llamamos $A = \log_a x$ y $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Multiplicamos:

$$x \cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow \log_a x \cdot y = A + B = \log_a x + \log_a y.$$

Ejemplo:

$$\log_a (2 \cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$$

2. El logaritmo de un **cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Si cuando Dividimos números con una misma base elevada a distintos exponentes los restamos, entonces la resta de logaritmos de dos factores será el logaritmo del cociente. Si $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Entonces $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos.

Demostración:

Llamamos $A = \log_a x$ y $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Dividimos:

$$x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow \log_a(x / y) = A - B = \log_a x - \log_a y.$$

Ejemplo:

$$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$$

3. El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

Si cuando elevamos una potencia a un exponente, multiplicamos los exponentes, entonces, el logaritmo de una potencia, será el producto del exponente por el logaritmo del número.

Demostración:

Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = \log_a x^y = y \log_a x$$

Ejemplo:

$$\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$$

4. El logaritmo de una **raíz** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Si cuando hacemos la raíz de orden n de un número lo podemos expresar como el número elevado a uno partido del orden de la raíz, entonces el logaritmo de la raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el orden.

Demostración:

Teniendo en cuenta que una raíz es una potencia de exponente fraccionario.

Ejemplo:

$$\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3} \right)$$

5. **Cambio de base:** El logaritmo en base a de un número x es igual al cociente de dividir el logaritmo en base b de x por el logaritmo en base b de a :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de **“fórmula del cambio de base”**. Antaño, cuando no existían las calculadoras, se calculaban los logaritmos utilizando los valores recogidos en las tablas logarítmicas.

Las calculadoras sólo permiten el cálculo de logaritmos decimales o neperianos, por lo que, cuando queremos utilizar la calculadora para calcular logaritmos en otras bases, necesitamos hacer uso de ésta fórmula.

Ejemplo:

$$\star \log_2 11 = \frac{\log 11}{\log 2} = \frac{1.04139269}{0.30103} = 3.45943162$$

Actividades resueltas

$\star$ Desarrollar las expresiones que se indican:

$$\log_5 \left[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4} \right] = \log_5 [a^3 \cdot b^2] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3 \log_5 a + 2 \log_5 b - 4 \log_5 c$$

$$\log \left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z} \right)^3 = 3 \log \left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z} \right) = 3 [\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)] = 3(2 \log x - 5 \log y - \log z) = 6 \log x - 15 \log y - 3 \log z$$

$\star$ Escribe con un único logaritmo:

$$3 \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{2}{3} \log_2 b + 2 \log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2 (a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2 (\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4) = \log_2 \left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4} \right)$$

$\star$ Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de $\log 2 = 0.301030$:

a) $4 \Rightarrow \log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot 0.301030 = 0.602060$

b) $1024 \Rightarrow \log 1024 = \log 2^{10} = 10 \cdot \log 2 = 10 \cdot 0.301030 = 3.01030$

Actividades propuestas

56. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d} \right)$

57. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de $\log 3 = 0.4771212$

a) 81

b) 27

c) 59 049

58. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \log m - 2 \log t - \log p + \frac{5}{2} \log h$$

Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular 26^{378} .

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378 \cdot \log(26)$$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$$\log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534} \cdot 10^{0.86} = 10^{534} \cdot 7.24.$$

Solución:

$$26^{378} = 7.24 \cdot 10^{534}.$$

Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora es capaz de calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con 50^{200} y comprueba que te sale

$$6.3 \cdot 10^{339}.$$