

44. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

a) $\frac{\sqrt{2}i}{-2-2i} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

Solución: a) $\sqrt{2}e^{i\pi/2}/2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}=1/2 e^{i7\pi/4}$; b) $(1 e^{i\pi/3})^{30}=1 e^{i10\pi}=1$.

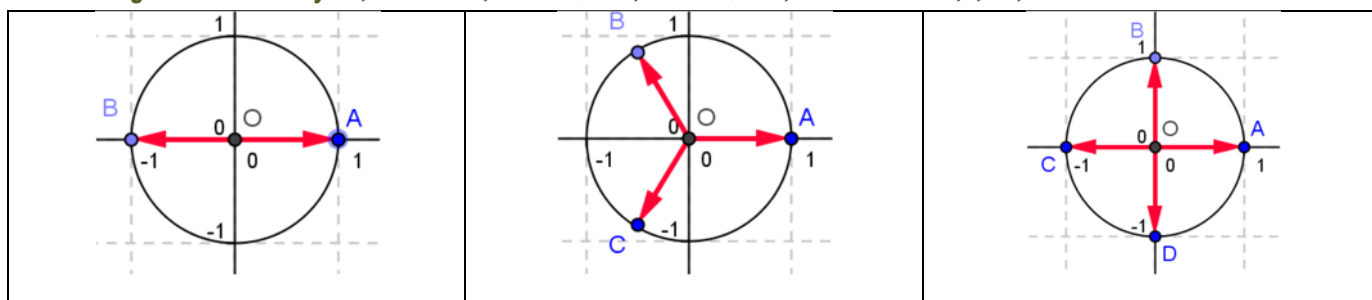
45. Resuelve las ecuaciones, obteniendo las raíces reales y complejas:

a) $x^2 = -1$
b) $x^3 = -8$
c) $x^4 + 16 = 0$

Solución: a) i y $-i$; b) $-2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$; c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

46. Calcula las raíces n -ésimas de la unidad, para $n = 2, 3$ y 4 . Representarlas gráficamente, y comprobar que están sobre la circunferencia de radio 1, y en los vértices de un polígono regular.

Solución gráfica: $n = 2$: 1 y -1 ; $n = 3$: $1, -1/2 + \sqrt{3}i/2, -1/2 - \sqrt{3}i/2$; $n = 4$: $1, i, -1, -i$.



3. LOGARITMOS

47. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

Solución:

$2^5 = 32$	$\Leftrightarrow \log_2 32 = 5$	$2^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_2 1 = 0$
$5^1 = 5$	$\Leftrightarrow \log_5 5 = 1$	$5^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_5 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\Leftrightarrow \log_2 2 = 1$	$5^2 = 25$	$\Leftrightarrow \log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\Leftrightarrow \log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$	$\Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

48. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$

b) $\log_5 25$

c) $\log_2 2^{41}$

d) $\log_5 5^{30}$

Solución: a) 5; b) 2; c) 41; d) 30.

49. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$

b) $\log_{10} 100$

c) $\log_{1/2}(1/4)$

d) $\log_{10} 0.0001$

Solución: a) 3; b) 2; c) 2; d) -4.

50. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$

b) $\log_{1/2} x = 4$

c) $\log_x 25 = 2$

Solución: a) $x = 6$; b) $1/16$; c) 5.

51. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

Solución: a) 1.5; b) -8.

52. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$

b) $\log \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d} \right)$

Solución: a) $1/5(\ln 4 + 2 \ln x - 3)$

b) $3 \log a + 2 \log b - 4 \log c - \log d$

53. Utiliza la calculadora para obtener

a) $\log 0.000142$; b) $\log 142$;

c) $\log 9 + \log 64$.

Solución: a) $\log 0.000142 = -3.8477117$; b) $\log 142 = 2.15228834$; c) $\log 9 + \log 64 = 2.76042248$

54. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de $\log 3 = 0.4771212$

- a) 81 b) 27 c) 59 049

Solución: a) $\log 81 = 4 \cdot (0.4771212)$; b) $\log 27 = 3 \cdot (0.4771212)$; c) $\log 59049 = 10 \cdot (0.4771212) = 4.771212$.

55. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2} \log m - 2 \log t - \log p + \frac{5}{2} \log h$

Solución: $\frac{1}{2} \log m - 2 \log t - \log p + \frac{5}{2} \log h = \log(m^{1/2}) - \log(t^2) - \log(p) + \log(h^{5/2}) = \log((m^{1/2} \cdot h^{5/2}) / (t^2 \cdot p))$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números reales

1. Calcula los valores exactos de $a + b$, $c - a$ y $a \cdot c$ para los números: (pista: racionalizar)
 $a = 2.7$ $b = 3.292929...$ $c = 0.01030303...$

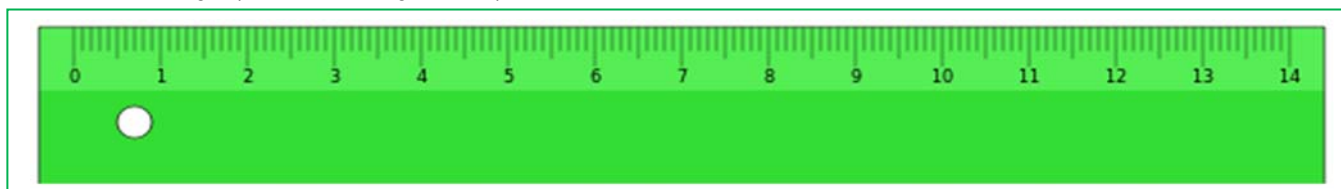
Solución: $a + b = 5.99292929... = 59330/9900$; $c - a = -2.689696969... = -26628/9900$; $ac = 0.027818181... = 2754/99000$.

2. Descubre cuál de estos números es irracional:

- a) 3.1416 b) $\sqrt{4}$ c) π

Solución: c) π

3. ¿Podemos encontrar números irracionales en las marcas de una regla graduada? ¿Hay algún punto de la regla (aunque no tenga marca) que se corresponda con un número irracional? Justifica tu respuesta.



Solución: Las marcas de la regla son números racionales, pero en la recta real hay muchos, infinitos, muchos más que números racionales (que son infinitos numerables) que son números irracionales (que son la potencia del continuo)

4. Clasifica los siguientes números en orden de mayor a menor y después represéntalos en la recta:

- a) 7 b) $25/4$
c) $\sqrt{45}$ d) $2 \cdot \pi$

Solución gráfica: $25/4 = 6.25 < 2 \cdot \pi = 6.28... < \sqrt{45} = 6.7... < 7$.

5. Escribe una sucesión infinita de números reales dentro del intervalo $(-1, 1)$.

Solución abierta: 0; 0.1; 0.11; 0.111; 0.1111; ... ; 0.111.....

6. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

- a) $|-5|$ b) $|4 - 4|$ c) $|3 \cdot 2 + 9|$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{7^2}$

Solución: a) 0; b) 0; c) 15; d) $\sqrt{7}$; e) 7.

7. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (pista: x puede tener dos valores)

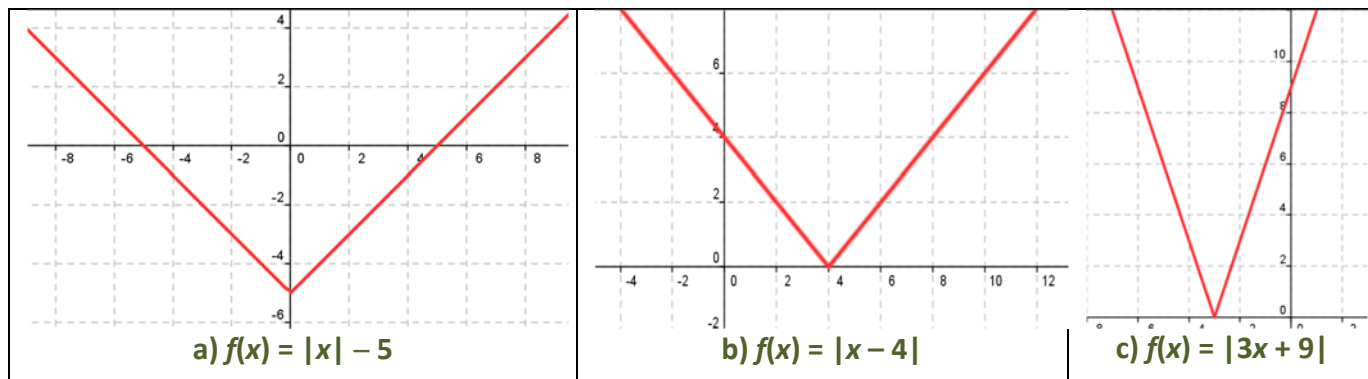
- a) $|x| = 5$ b) $|x - 4| = 0$ c) $|3x + 9| = 21$

Solución: a) 5 y -5; b) 4; c) -10 y 4.

8. Dibuja las siguientes funciones en un gráfico:

- a) $f(x) = |x| - 5$ b) $f(x) = |x - 4|$ c) $f(x) = |3x + 9|$

Solución gráfica:



9. Elige un día y calcula la distancia que has recorrido en total, y compárala con la distancia entre los puntos inicial (al principio del día) y final (al terminar el día).

Solución abierta:

10. Un artesano fabrica dos productos. El primero (a) le cuesta 2 horas y 3 euros en material, y el segundo (b) le cuesta 6 horas y 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de trabajo, y los vende por (a) 30 y (b) 90 euros, averigua cuál es más rentable para su negocio.

Solución: Con el primero gana 7 euros con cada producto. Con el segundo no gana nada.

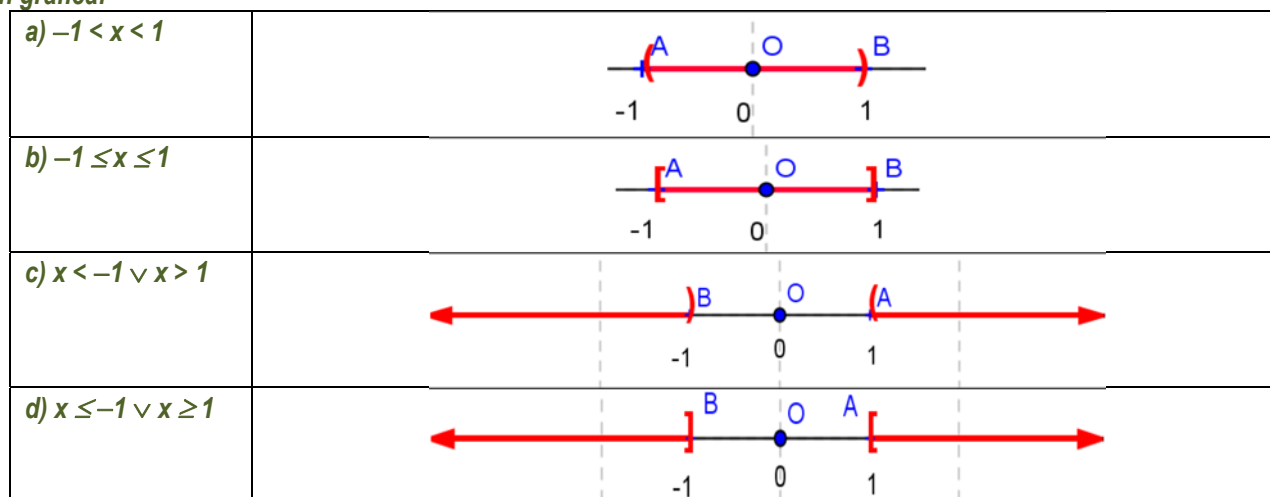
11. Entre Kroflite y Beeline hay otras cinco ciudades. Las siete se encuentran a lo largo de una carretera recta, separadas unas de otras por una distancia entera de kilómetros. Las ciudades se encuentran espaciadas de tal manera que si uno conoce la distancia que una persona ha recorrido entre dos de ellas, puede identificarlas sin ninguna duda. ¿Cuál es la distancia mínima entre Kroflite y Beeline para que esto sea posible?

Solución: 21 km.

12. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

- a) $|x| < 1$
 b) $|x| \leq 1$
 c) $|x| > 1$
 d) $|x| \geq 1$

Solución gráfica:



13. Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3.5 unidades de -2 , calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

Solución: -3 y 9 ; -5.5 y 1.5 ; $9 - (-5.5) = 14.5$.

14. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

Solución: $[-3, 8)$

15. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \leq 3$.

Solución: $[5, 11]$

16. Determina los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $-A$ en los casos siguientes:

a) $A = [-11, -9]$; $B = (-1, 6)$

b) $A = [-5, 5]$; $B = (3, 4)$

Solución: a) $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = [-11, -9] \cup (-1, 6)$; $A - B = A = [-11, -9]$

b) $A \cap B = B = (3, 4)$; $A \cup B = A = [-5, 5]$; $A - B = [-5, 3] \cup [4, 5]$.