

Imaginate que se te presenta en un problema la siguiente ecuación:

$$3^x = 18 \quad \text{¿A qué elevo 3 para que me dé 18?}$$

Evidentemente, no se trata de una solución entera, ni siquiera sencilla.

Pues para resolver este tipo de situaciones, se inventó el operador LOGARITMO.

Con ayuda de una calculadora científica, podemos resolverlo: $\log_3 18 \approx 2.631$

El logaritmo en base "b" de "r" podemos definirlo como:

$$\log_b r = x \iff b^x = r$$

LOGARITMOS

A los logaritmos de base 10 se les llama LOGARITMOS DECIMALES y se escriben sin base. Por ejemplo: $\log 100 = 2$ ¿A qué elevo 10 para que me dé 100?

A los logaritmos de base $e \approx 2.71828...$ se les llama LOGARITMOS NEPERIANOS, estos se escribe "ln" sin base. Por ejemplo: $\ln 1 = 0$ ¿A qué elevo "e" para que me dé 1?

Ya hemos visto que algunos logaritmos podemos calcularlos sin la ayuda de la calculadora: $\log_3 27 = 3$ $\log 1000 = 3$

Sin embargo, muchos otros nos resultan imposibles. $\log_3 20$
 Simplemente sabemos que será un número entre 2 y 3

A partir de las propiedades de las potencias, podemos deducir algunas PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS, que nos pueden ayudar a resolver ciertos logaritmos sin ayuda de la calculadora.

$\log_b b = 1$ $\log_b 1 = 0$	$\log_7 7 = 1$ $\log_7 1 = 0$	$\log_b (r \cdot s) = \log_b r + \log_b s$ $\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ $(5 = 2 + 3)$
$\log_b r^n = n \cdot \log_b r$ $\log_3 9^2 = 2 \cdot \log_3 9$ $(4 = 2 \cdot 2)$		$\log_b (r : s) = \log_b r - \log_b s$ $\log_2 (16 : 8) = \log_2 16 - \log_2 8$ $(1 = 4 - 3)$

Hagamos unos ejercicios

$$1) \log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \log_3 3$$

$$\log_2 0.25 = \log_2 (1/4) = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2$$

Factorizar suele ayudarnos, y también hallar la fracción generatriz

$$\text{Efectivamente: } 2^{-2} = 1/2^2 = 1/4 = 0.25$$

Si los resultados son enteros, siempre podemos comprobarlos

2) Sabiendo que $\log 5 = 0.70$ aproximadamente, calcula los siguientes logaritmos: (contamos también con que $\log 10 = 1$)

$$\log 500 = \log (5 \cdot 100) = \log 5 + \log 100 = 0.70 + 2 = 2.70$$

$$\log 0.2 = \log (1/5) = \log 1 - \log 5 = 0 - 0.70 = -0.70$$

$$\log \sqrt{125} = \log (5^3)^{1/2} = (3/2) \cdot \log 5 = (3/2) \cdot 0.70 = 1.05$$

$$\log 2 = \log (10/5) = \log 10 - \log 5 = 1 - 0.70 = 0.30$$

Conociendo los logaritmos de dos números, podemos obtener los de sus productos y cocientes

Aún tenemos una propiedad más, muy útil, ya que nos permitirá cambiar de base a nuestro antojo

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

Y nosotros podemos elegir "a" con el valor que queramos

Cuando tenemos que recurrir a la calculadora, puede ser que nos encontremos que tan solo resuelve logaritmos decimales o neperianos, por lo que resultará imprescindible recurrir al cambio de base. Por ejemplo

$$1.89278... = \frac{2.079...}{1.098...} = \frac{\ln 8}{\ln 3} = \log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} = \frac{0.903...}{0.477...} = 1.89278...$$

Incluso, esa propiedad, puede ayudarnos a resolver muchos logaritmos sin necesidad de calculadora:

$$\log_3 7 \cdot \log_7 3 = \frac{\log 7}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 7} = 1$$

Hagamos unos ejercicios: Como 8 y 4 son potencias de 2...

$$\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{2}{3} \quad \text{Efectivamente, } 8^{2/3} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\log_9 \sqrt{27} = \frac{\log_3 3^{3/2}}{\log_3 3^2} = \frac{3/2}{2} = 3/4 \quad \sqrt{27} = (3^3)^{1/2}$$

Recordemos que $\log 5 \approx 0.70$

$$\log_3 5 \cdot \log 27 = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \log 3^3 = \frac{\log 5 \cdot 3 \log 3}{\log 3} = 2.10$$

$$\log_5 20 = \frac{\log 20}{\log 5} = \frac{\log(100/5)}{\log 5} = \frac{\log 100 - \log 5}{\log 5} = \frac{2 - 0.70}{0.70} \approx 1.86$$

1. Calcula los siguientes logaritmos usando sus propiedades:

a) $\log_2 \sqrt{32} = \dots$ b) $\log_2 0.25 = \dots$

c) $2 \log_8 4^4 = \dots$ d) $4 \log_9 27^3 = \dots$

2. Sabiendo que $\log 2 = 0.3$ aproximadamente, calcula:

a) $\log_2 40 = \dots$ b) $\log \sqrt{\frac{1}{200}} = \dots$

c) $\log_2 \sqrt[3]{0.25} = \dots$