

CURIOSIDADES. REVISTA

El inventor del ajedrez

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:

"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".

- a) ¿Qué tipo de progresión se utiliza? ¿Aritmética o geométrica? ¿Cuál es la razón?
- b) ¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?
- c) ¿Podrías hallar el total de granos de trigo utilizando fórmulas y usando la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$$

Solución: a) Geométrica $r = 2$; b) Mas de 18 trillones; c) $1.8 \cdot 10^{19}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la diferencia es 5.

Solución: 499.

2. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término.

Solución: 9.

1. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 4, la diferencia 7 y el término n -ésimo 88, halla n .

Solución: 13.

2. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.

Solución: $a_1 = 12$; $d = 6$.

3. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia $1/2$. Halla el término 20.

Solución: 11.

4. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 3.

Solución: 9, 12 y 15.

5. Halla tres números que estén en progresión aritmética y tales que, aumentados en 5, 4 y 7 unidades respectivamente, sean proporcionales a 5, 6 y 9.

Solución: 5, 8 y 11.

6. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.

Solución: 25075.

7. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 80 y la diferencia es 3. Halla dichos términos. .

Solución: 2, 5 y 8.

8. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14,... para obtener como resultado 1064?

Solución: 19.

9. La suma de n números naturales consecutivos tomados a partir de 11 es 1715. ¿Cuántos términos hemos sumado?

Solución: 49 números.

10. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.

Solución: 162.

11. La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1287. Halla estos números.

Solución: 9, 11 y 13.

12. Tres números en progresión aritmética tienen por producto 16640; el más pequeño vale 20. Halla los otros dos.

Solución: 20, 26 y 32.

13. El producto de cinco números en progresión aritmética es 12320 y su suma 40. Halla estos números sabiendo que son enteros.

Solución: 2, 5, 8, 11 y 14.

14. Calcula tres números sabiendo que están en progresión aritmética, que su suma es 18 y que la suma del primero y del segundo es igual al tercero disminuido en dos unidades.

Solución: 2, 6 y 10.

15. La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de los extremos es 30. Halla los términos de la progresión.

Solución: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 y 31.

16. Halla cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es 22, y la suma de sus cuadrados, 166.

Solución: 1, 4, 7 y 10.

17. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.

Solución 1ª: 1, 5, 9 y 13 Solución 2ª: -13, -9, -5, -1.

18. Halla los seis primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los tres primeros suman -3 y los tres últimos 24.

Solución: -4, -1, 2, 5, 8 y 11.

19. En una progresión aritmética el onceavo término excede en 2 unidades al octavo, y el primero y el noveno suman 6. Calcula la diferencia y los términos mencionados.

Solución: $d = 3$ y 5, 8 y 11, $a_1 = 1/3$; $a_8 = 5$; $a_9 = 17/3$; $a_{11} = 7$.

20. En una progresión aritmética, los términos segundo y tercero suman 19, y los términos quinto y séptimo suman 40. Hállalos.

Solución: 8, 11, 17 y 23.

21. Sabiendo que las medidas de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y que uno de ellos mide 100° , calcula los otros dos.

Solución: 20° y 60° .

22. Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m y que el volumen del ortoedro es de 15470 m^3 .

Solución: 17, 26 y 35.

23. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60° . Calcula el valor de cada ángulo.

Solución: $100^\circ, 112^\circ, 124^\circ, 136^\circ, 148^\circ$ y 160° o bien $90^\circ, 102^\circ, 114^\circ, 126^\circ, 138^\circ$ y 150° .

24. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 36 metros. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución: 9, 12 y 15.

25. Un coronel manda 5050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

Solución: 100 filas.

26. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 800 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 50 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 12 años?

Solución: 1350 €.

27. Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.

Solución: 5, 7, 9 y 11 años.

28. Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?

Solución: $a_{15} = 200$ minutos y 6150 minutos en un mes.

29. En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm, y la sexta, 134 dm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 230 dm?

Solución: fila 16.

30. Calcula el término onceavo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

Solución: 1024.

31. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

Solución 1ª: 1, 3, 9, 27 y 81; solución 2ª: 1, -3, 9, -27 y 81.

32. En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

Solución: 13.

33. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón $1/2$, halla el primer término.

Solución: 64.

34. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.

Solución: $1/32$ y $r = 2$.

35. Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.

Solución: 4, 20 y 100.

36. El volumen de un ortoedro es de 3375 cm^3 . Halla la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que la arista intermedia mide 10 cm más que la menor.

Solución: 5, 15 y 45.

37. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...

Solución: $3^8 \cdot 2^{28} = 1753151963136$

38. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...

Solución: 3069.

39. La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 16 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.

Solución: $r = 2$.

40. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...

Solución: 16.

41. Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26 y su producto 216.

Solución: 2, 6 y 18.

42. Calcula el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2.

Solución: 2^{11} .

43. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale un millón. Calcula dichos números.

Solución: 25, 100 y 400.

44. Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0,5 y los dos últimos 0,125.

Solución: $1/3$, $1/6$, $1/12$ y $1/24$.

45. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?

Solución: 7 términos.

46. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla los términos primero y séptimo.

Solución: $a_1 = 7$ y $a_7 = 5103$.

47. Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.

Solución: 23, 69 y 207.

48. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.

Solución: 16, 48 y 144.

49. Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.

Solución: 5, 20, 80 y 320.

50. Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.

Solución: 9, 27, 81 y 243.

51. Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que sus aristas suman 420 m y su volumen 8000 m^3 .

Solución: 5, 20 y 80.

52. Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.

Solución: 17, 51 y 153.

53. La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.

Solución: 8, 40 y 200.

54. Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.

Solución: 8, 20, 50 y 125.

55. En una progresión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término sexto.

Solución: $a_6 = 6\sqrt[5]{3}$.

56. Una progresión geométrica tiene cinco términos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.

Solución: 8, 16, 32, 64 y 128.

57. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

Solución: $x = 3$.

58. A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

Solución: 100, 200 y 400.

59. Halla la fracción generatriz del número decimal 0,737373..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

Solución: 73/99.

60. Se tiene una cuba de vino que contiene 1024 litros. El 1 de octubre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 10 de octubre?

Solución: 1 litro.

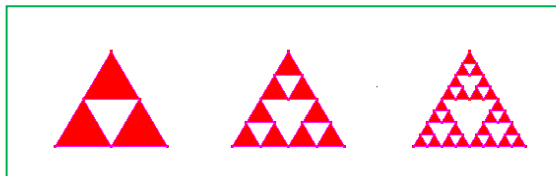
61. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

Solución: 2.

62. Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.

Solución: PG: 4, 16 y 64; PA: 3, 12 y 21.

63. *Triángulo de Sierpinsky*: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de *Sierpinsky*, y es un fractal. Imagina que el primer triángulo tiene un área A . Cuando aplicamos la primera iteración, el área es $(3/4)A$. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L . Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



Solución: Sucesión de las áreas: $3/4 A$, $9/16 A$, $27/64 A$...; Decreciente;

Sucesión de las longitudes: L , $L/2$, $L/4$ Decreciente.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$?
- a) 5 b) 3 c) 2 d) No es una progresión geométrica

Solución: b).

2. En la sucesión de múltiplos de 13, el 169 ocupa el lugar:
- a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

Solución: c).

3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 7, 13, 19, 31,... es:
- a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

Solución: d).

4. La sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:
- a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
c) Es una progresión geométrica de razón 3 d) Es una progresión aritmética de diferencia 3.

Solución: c).

5. Sea la sucesión: 2, 10, 50, 250, 1250... su término general es:
- a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ d) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

Solución: a).

6. ¿Cuánto suman las potencias de 2 comprendidas entre 2^1 y 2^{10} ?
- a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048

Solución: b).

7. La progresión aritmética cuyo primer término es 1 y su diferencia 2, tiene como término general:
- a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$

Solución: c).

8. ¿Cuál es el valor de la suma: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$?
- a) 500.000 b) 250.000 c) 50000 d) 25000

Solución: b).

9. María está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió tres páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 7 días?
- a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

Solución: b).

10. A Roberto le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?
- a) 6240 € b) 6104 € c) 7832.04 € d) 7299.92 €

Solución: d).