

Actividades resueltas

- Calcula el límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1} \right)^{2n-1}$

Primero comprobamos que es un límite tipo e , el exponente $2n - 1$ tiende a infinito, y la base:

$$\frac{3n-3}{3n+1} \rightarrow \frac{3n}{3n} \rightarrow 1, \text{ tiende a } 1.$$

Queremos completar el primer 1 de la definición de e , para lo que tenemos que dividir:

$$\frac{3n-3}{3n+1} = \frac{3n+1-3-1}{3n+1} = 1 + \frac{-4}{3n+1}$$

Para conseguir el segundo 1, dividimos por -4

$$1 + \frac{-4}{3n+1} = 1 + \frac{1}{\frac{3n+1}{-4}}$$

Hacemos que el exponente coincida con $\frac{3n+1}{-4}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1} \right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n+1}{-4}} \right)^{\frac{3n+1}{-4} \cdot \frac{-4}{3n+1} \cdot (2n-1)} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n+1}{-4}} \right)^{\frac{3n+1}{-4}} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{3n+1} \cdot (2n-1)}$$

El límite de la base hemos conseguido que sea e . El límite del exponente sabemos calcularlo:

$$\frac{-4}{3n+1} \cdot (2n-1) \rightarrow \frac{-8n}{3n} \rightarrow \frac{-8}{3}$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1} \right)^{2n-1} = e^{\frac{-8}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^8}}$$

Actividades propuestas

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\frac{5n^3 + 2n}{5n^3 - 6} \right)^{2n}$

b) $a_n = \left(\frac{3+2n}{5+2n} \right)^{3n+2}$

c) $a_n = \left(1 + \frac{7}{n+3} \right)^{n^2}$

d) $a_n = \left(\frac{2n+2}{2n-3} \right)^{\frac{n^3+1}{n}}$

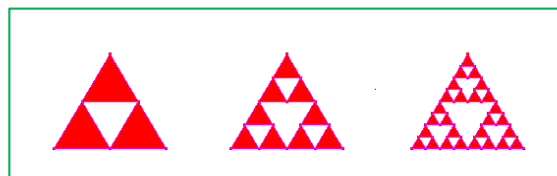
RESUMEN

CONCEPTO	DEFINICIÓN	EJEMPLOS
Sucesión	Función entre los números naturales, $\mathbb{N}$, y los reales, $\mathbb{R}$.	3, 1, 4, 1, 5, 9, 2....
Progresión aritmética	Sucesión de números reales en la que la diferencia d entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante.	2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
	Término general: $a_n = a_k + (n - k) d$ Suma de los n primeros términos: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$a_n = 2 + 3n$ $S_8 = (8/2) \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8)) = 112$
Progresión geométrica	Es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$	3, 6, 12, 24, ... 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...
	Término general: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ Suma: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$, para $r \neq 1$ Suma infinita: $S = \frac{a_1}{1 - r}$, para $0 < r < 1$. Producto: $P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}}$	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow$ $S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765$ $P_9 = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$ $a_n = (\frac{1}{2})^n \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
El número e	$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas: $e \approx 2.71828...$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sucesiones

1. Calcula el término que ocupa el lugar 1000 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 2 y la diferencia es 3.
2. El término octavo de una progresión aritmética es 5 y la diferencia $1/2$. Halla el primer término y el término 100.
3. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 2.
4. Calcula la suma de los múltiplos de 42 comprendidos entre 1 000 y 2 000.
5. La suma de 16 números en progresión aritmética es 548 y el término 16 es 60.5. Halla el primer término.
6. El producto de 4 términos en progresión geométrica es 5 184 y el primer término es 3. Escribe el resto de los términos.
7. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 700 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 30 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años?
8. El quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.
9. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.
10. A una cuerda de 350 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 50 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.
11. Halla la fracción generatriz del número decimal $0.12121212\dots$, como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.
12. Se tiene una cuba de vino que contiene 512 litros. El 1 de diciembre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 15 de diciembre?
13. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.
14. *Triángulo de Sierpinski*: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina *Triángulo de Sierpinski*, y es un fractal. A) Imagina que el primer triángulo tiene un área A . Cuando aplicamos la primera iteración, el área es $(3/4)A$. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? B) Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L . Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



Límite de sucesiones

15. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & a_n = \frac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6} & \text{b)} & a_n = \frac{5n^2 - 4}{n^2 - 6n} \\ \text{c)} & a_n = \frac{5n^{10} + 2n^2}{3n^{10} + 8n} & \text{d)} & a_n = \frac{n-3}{n+7} \end{array}$$

16. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & a_n = \frac{2n^2 + 2n}{2n^3 - 6} & \text{b)} & a_n = \frac{5n - 4}{n^2 - 6n} \\ \text{c)} & a_n = \frac{5n^7 + 2n^2}{3n^{10} + 8n} & \text{d)} & a_n = \frac{-3}{n+7} \end{array}$$

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & a_n = \frac{2n^5 + 2n}{2n^3 - 6} & \text{b)} & a_n = \frac{5n^7 - 4}{n^2 - 6n} \\ \text{c)} & a_n = \frac{5n^{12} + 2n^2}{3n^{10} + 8n} & \text{d)} & a_n = \frac{n^2 - 3}{n+7} \end{array}$$

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & a_n = \frac{\sqrt{2n^5 + 2n}}{2n^3 - 6} & \text{b)} & a_n = \frac{5n^7 - 4}{\sqrt{n^2 - 6n}} \\ \text{c)} & a_n = \frac{\sqrt{n^{12} + 2n^2}}{3n^{10} + 8n} & \text{d)} & a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3}}{n+7} \end{array}$$

19. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a_n = \left(1 + \frac{3}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1} & \text{b)} & a_n = \left(1 - \frac{4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2} \\ \text{c)} & a_n = \left(1 + \frac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} \end{array}$$

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a_n = \left(\frac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1} & \text{b)} & a_n = \left(\frac{5n^7 - 4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2} \\ \text{c)} & a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} \end{array}$$

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a_n = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 6}\right)^{2n-3} & \text{b)} & a_n = \left(\frac{n^2 - 4}{n^2 - 6n}\right)^{n-2} \\ \text{c)} & a_n = \left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}} \end{array}$$

Exponencial y logarítmica

22. La población de peces de una piscifactoría sigue un modelo de crecimiento exponencial y ha pasado de 100 ejemplares a 1 500 en 60 días. ¿Qué población tendrá en 100 días?
23. Ingresamos en un banco 20 000 euros al 3 % de interés compuesto anual. ¿En cuánto tiempo habremos duplicado nuestro dinero?
24. Vanesa ha comprado un coche por 17 000 euros. Se estima que el precio se devalúa un 10 % cada año. ¿A cuánto lo podrá vender al cabo de 5 años? Si tiene un accidente en que el coche queda destrozado cuando tiene 7 años, ¿cuánto le pagará la compañía de seguros?
25. La escala de Richter relaciona la intensidad de un terremoto, x , con su energía y (en ergios): $\log y = 11.4 + 1.5x$. Calcula la energía de un terremoto: a) de una intensidad 5 en dicha escala, y b) de una intensidad 7.
26. Juan ha visto cucarachas en su casa. Mira de que tipo es y se entera que se triplican cada mes siguiendo un modelo exponencial. Estima que en este momento podría tener 20. Si no hiciera nada, ¿cuántas tendría al cabo de 5 meses?
27. En la fórmula del término n -ésimo de una progresión geométrica, despeja n , aplicando logaritmos.
28. Nieves tiene un gran frasco de perfume muy concentrado de un litro. Saca con una pipeta 10 cm^3 que sustituye con agua. Vuelve a sacar de la mezcla con una pipeta 10 cm^3 que vuelve a sustituir con agua. Así hasta conseguir una mezcla con el 75 % de la inicial. ¿Cuántas operaciones ha debido hacer?
29. Resuelve, tomando logaritmos, la ecuación exponencial: $(0.99)^n = 0.75$.
30. Utiliza la calculadora para estimar el valor de 2^{63} . Estima también $2^{64} - 1$.
31. Resuelve las ecuaciones:

a) $3^{2x-4} = 81$

b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{5}$

c) $x^{-1/\sqrt{8}} = 2$

d) $3^{5^x} = 27$

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n = 7 \cdot 4^{n-1}$?
a) 7 b) 4 c) -1 d) No es una progresión geométrica
2. En la sucesión de múltiplos de 11, el 121 ocupa el lugar:
a) 1 b) 2 c) 11 d) 121
3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20,... es:
a) 220 b) 275 c) 55 d) 250
4. La sucesión 1, $1/5$, $1/25$, $1/125$, ...:
a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
c) Es una progresión geométrica de razón $1/5$ d) Es una progresión aritmética de diferencia $1/5$.
5. La solución de la ecuación $5^{\frac{1}{5}x} = 625$ es:
a) 40 b) 8 c) 10 d) 20
6. La progresión aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia 5, tiene como término general:
a) $a_n = 5n$ b) $a_n = 5n + 2$ c) $a_n = 5n - 1$ d) $a_n = 5n - 2$
7. Pepa está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió dos páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 5 días?
a) 62 b) 32 c) 1 024 d) 128
8. A Luis le han tocado 6 000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?
a) 6 240 € b) 6 104 € c) 7 832.04 € d) 7 299.92 €
9. La sucesión $a_n = \frac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$ tiene como límite:
a) 0 b) ∞ c) $-3/2$ d) 7
10. La sucesión $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ tiene como límite:
a) e^2 b) ∞ c) e^{-2} d) $-e$