

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una empresa mayorista de viajes está confeccionando una oferta para distribuirla en diferentes agencias de viaje. Se trata de un viaje en avión, de ida y vuelta, a Palma de Mallorca cuyo precio dependerá del número final de viajeros. Los datos concretos son:

- A) Si no hay más de 100 personas interesadas, el vuelo costará 150 euros por persona.
- B) Si hay más de 100 personas interesadas, por cada viajero que pase del centenar el precio del viaje se reducirá en 1 euro. No obstante, el precio del vuelo en ningún caso será inferior a 90 euros.

Estudia y determina el precio final del vuelo, por persona, en función del número total de viajeros. Asimismo, expresa la cantidad que ingresará la empresa según el número de viajeros.

Solución: Llamaremos n al número de viajeros, p al precio por viajero y T a la cantidad total ingresada por la empresa. Todos los valores de las variables son números enteros.

Si $n < 101$: $P = 150$; $T = 150n$

Si $n = 100 + x$ ($0 < x < 61$): $p = 150 - x$; $T = 15\,000 + 50x - x^2$

Si $n > 160$: $p = 90$; $T = 90n$.

2. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

- i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número par y que no lo muestre
- ii. Que lo multiplique por 5
- iii. Que al resultado anterior le sume 5
- iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
- v. Que al resultado anterior le sume 10
- vi. Que multiplique por 5 lo obtenido
- vii. Que divida entre 100 la última cantidad
- viii. Que al resultado precedente le reste la mitad del número que escribió
- ix. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?

Solución: Llamaremos $2n$ al número par inicial. Las instrucciones se traducen en la expresión siguiente:

$$\frac{[(10n + 5) \cdot 2 - 10] \cdot 5}{100} = \frac{100n}{100} - n = 0$$

3. Los responsables de una empresa, en previsión de unos futuros altibajos en las ventas de los productos que fabrican, piensan proponer a sus trabajadores a finales del año 2014 lo siguiente:

- i. La disminución de los sueldos, para el próximo año 2015, en un 10%.
- ii. Para 2016 ofrecen aumentar un 10% los salarios de 2015.
- iii. En general, sugieren que el sueldo disminuya un 10% cada año impar y que aumente un 10% cada año par.

Si finalmente se aplica lo expuesto, estudia si los trabajadores recuperarán en el año 2016 el salario que tenían en 2014. Analiza qué ocurre con los sueldos tras el paso de muchos años.

Solución: Si llamamos s al salario de 2014, los salarios de los años sucesivos son:

$0.9s$; $0.99s$; $0.891s$; $0.9801s$; $0.88209s$; $0.970299s$; ...

Los salarios son cada vez menores que dos años antes.

4. Los responsables de la anterior empresa, después de recibir el informe de una consultora, alteran su intención inicial y van a proponer a sus trabajadores, a finales del año 2014, lo siguiente:

- a) Un aumento de los sueldos, para el próximo año 2015, de un 10%.
- b) Para 2016, una reducción del 10% sobre los salarios de 2015.
- c) En general, sugieren que el sueldo aumente un 10% cada año impar y que disminuya un 10% cada año par.

Si se aplica lo expuesto, analiza si el salario de los trabajadores del año 2016 coincidirá con el que tenían en 2014. Estudia cómo evolucionan los sueldos tras el paso de muchos años.

Solución: Si llamamos s al salario de 2014, los salarios de los años sucesivos son:

$1.1s$; $0.99s$; $0.891s$; $0.9801s$; $0.88209s$; $0.970299s$; ...

A partir del tercer año pierden dinero como en la propuesta anterior.

5. Observa si hay números en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{x-3}{x+1}$

b) $\frac{2x-1}{(x-5) \cdot (2x+7)}$

c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$

d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

Solución: a) $x = -1$;

b) $x = 5$, $x = -3.5$;

c) $x = 1$;

d) $x = y = 0$.

6. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x = 1$

b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x = -2$

c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$

d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$

e) $\frac{2x-1}{(x-5) \cdot (2x+7)}$ en $x = \frac{1}{2}$

Solución: a) -1; b) -2/9; c) 0; d) -1; e) 0.

7. Una persona tiene ahorrados 3000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2.5 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

Solución: 3 151,88 €.

8. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(-2) = -6$.

Solución: Hay infinitos polinomios. Uno de ellos es $x^2 - 10$.

9. Considera los polinomios $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $q(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ y $r(x) = x^2 - 3x + 2$. Haz las siguientes operaciones:

a) $p + q + r$

b) $p - q$

c) pr

d) $pr - q$

Solución: a) $(p + q + r)(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2 - 4$;

b) $(p - q)(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 5x + 4$

c) $(pr)(x) = 2x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 15x^2 + 11x - 2$;

d) $(pr - q)(x) = 2x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 12x + 3$.

10. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{-by}{3}\right)$

b) $(0.1x + 0.2y - 0.3z) \cdot (0.3x - 0.2y + 0.1z)$

c) $(x-y) \cdot (y-1) \cdot (x+a)$

Solución: a) $\frac{-15abxy + 2by^2}{30}$; b) $0.03x^2 - 0.04y^2 - 0.03z^2 + 0.04xy - 0.08xz + 0.08yz$; c) $x^2y + xya - x^2 - xa - y^2x - y^2a + ya$

11. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $2x^3 + x^2 - 12x + 7$ entre $x + 3$;

b) $-4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8$ entre $2x^2 - 3x + 1$;

c) $-3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14$ entre $-x^3 - 2x + 3$

Solución: a) Cociente: $2x^2 - 5x + 3$, Resto: -2;

b) Cociente: $-2x^2 + x + 6$, Resto: $-4x + 2$;

c) Cociente: $3x^2 - 6$, Resto: $-9x^2 - 6x + 4$.

12. Calcula los cocientes:

a) $(4x^3) : (x^2)$

b) $(4x^3y^3z^4) : (3x^2yz^2)$

c) $(x^4 - 4x^2y + 4y^2) : (x^2 - 2y)$

Solución: a) $4x$;

b) $(4/3)xy^2z^2$;

c) $x^2 - 2y$.

13. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x}$

b) $\frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1}$

c) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x}$

d) $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x}$

e) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x}$

Solución: a) $\frac{2x^2-1}{x}$;

b) $\frac{2x^2+10x+3}{x^2+x}$

c) $\frac{(x-1)(2-x)}{x^2(x-3)}$

d) $\frac{x-1}{(2-x)(x-3)}$.

14. Encuentra un polinomio $p(x)$ tal que $2a \mid$ dividir $p(x)$ entre $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = -3x^2 + 1$.

Solución: Existen infinitas soluciones de la forma $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio cualquiera..

15. Calcula las potencias:

a) $(x + 2y - z)^2$

b) $(x - 3y)^3$

c) $\left(a + \frac{b}{3}\right)^2$

d) $(x^2 - 2z^3)^2$

Solución: a) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$; b) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$; c) $a^2 + (2/3)ab + (1/9)b^2$; d) $x^4 - 4x^2z^3 + 4z^6$.

16. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $x^4 + 8x^2 + 16$

c) $x^2 - \sqrt{12}xy + 3y^2$

d) $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y + 1$

e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

f) $x^2 - 25$

g) $x^2 + 5$

h) $5x^2 - 1$

i) $x^2 - 8y^2$

j) $x^4 - 1$

k) $x^2 - y^2$

l) $x^2 - 2y^2z^2$

Solución: a) $(x - 3)^2$

b) $(x^2 + 4)^2$

c) $(x - \sqrt{3}y)^2$

d) No

e) No;

f) $(x + 5)(x - 5)$

g) No;

h) $(\sqrt{5}x + 1)(\sqrt{5}x - 1)$;

i) $(x + \sqrt{8}y)(x - \sqrt{8}y)$

j) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$;

k) $(x + y)(x - y)$

l) $(x + \sqrt{2}yz)(x - \sqrt{2}yz)$

17. Analiza si el numerador y el denominador de las siguientes expresiones algebraicas proceden del desarrollo de un binomio, o de un producto suma por diferencia, y simplifícalas:

$$a) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$b) \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

$$c) \frac{xy^3 - yx}{y^4 - 1}$$

Solución: a) $\frac{x+1}{x-1}$

b) $\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$

c) $\frac{xy}{y^2 + 1}$

18. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

$$a) \frac{3}{x(3-x)} - \frac{1}{2(3-x)}$$

$$b) 3x^4 - 5x^3 + \frac{x^4 - 1}{x^3} \cdot \frac{x^5}{x^2 + 1}$$

$$c) \frac{x-2y}{a-b} + \frac{4x+5y}{3a-3b}$$

Solución: a) $\frac{6-x}{2x(3-x)}$

b) $4x^4 - 5x^3 - x^2$

c) $\frac{7x-y}{3a-3b}$

19. Simplifica todo lo posible:

$$a) \left(yx^4 - \frac{y}{x^2} \right) : \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$b) \frac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b-a} : \frac{b+a}{b-a}$$

$$c) \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{4}{a-b}$$

Solución: a) $\frac{y(x^3-1)}{x}$

b) $(a+b)^2$

c) $\frac{ab}{a-b}$

20. Simplifica todo lo posible:

$$a) \frac{\frac{1}{a+y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a+y} + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}}$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)$$

$$c) \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{x}{3} + \frac{y}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}}$$

Solución: a) $\frac{x-y-a}{x+y-a}$

b) $\frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2-2x-3}$

c) $\frac{(2y-x)(y-3x)}{(3y+2x)(y-2x)}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot y^2$ b) $-3x^4 - x^3 + x + 7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2} + 6xa^2 - \frac{3}{a} + 9$

Solución: a) $3\sqrt{5}$ b) $-3, -1, 1, 7$ c) $1, 8, 4, -2, 6, -3, 9$.

2. Destaca las variables, o indeterminadas, de las precedentes expresiones algebraicas.

Solución: a) x, y b) x c) x, y, a .

3. Del polinomio $5x^4 - 8x^2 - x + 9$ indica su grado y los monomios que lo integran.

Solución: Grado 4; monomios: $5x^4, -8x^2, -x, 9$.

4. La expresión $\frac{x-7}{4-2x}$ no tiene sentido para : a) $x = 7$, b) $x = 2$, c) $x = 7$ y $x = 2$, d) $x = 0$

Solución: b).

5. Cualquier polinomio:

- a) puede ser evaluado en cualquier número.
- b) no puede ser evaluado en el número cero.
- c) no puede ser evaluado en ciertos números concretos.

Solución: a).

6. El valor numérico de la expresión $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x = 1, y = 2, z = -1$ es:

- a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

Solución: b).

7. Completa adecuadamente las siguientes frases:

- a. La suma de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado **dos**.
- b. La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado **dos**.
- c. El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **cuatro**.
- d. La diferencia de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado **dos**.

8. Finaliza adecuadamente las siguientes frases:

- a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **menor o igual a dos**.
- b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **menor o igual a dos**.
- c) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **menor o igual a dos**.

9. Al dividir el polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 + 4$ entre $q(x) = x^2 + 2x + 2$ el polinomio resto resultante:

- a) debe ser de grado 2.
- b) puede ser de grado 2.
- c) debe ser de grado 1.
- d) ninguna de las opciones precedentes.

Solución: b).

10. Para que una fracción polinómica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sea *equivalente* a un polinomio:

- a) los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ deben ser del mismo grado.
- b) no importan los grados de $p(x)$ y $q(x)$.
- c) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior o igual al grado del polinomio denominador, $q(x)$.
- d) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior al grado del polinomio denominador, $q(x)$.

Solución: c).